Asupra unei probleme de la ONM 2017

M. TĂRNĂUCEANU[1]

Abstract. We say that a finite group G has the property (P) if for every automorphism f of G there exists a natural number m such that $f(x) = x^m$ for every $x \in G$. In this article we prove that a finite group has the property (P) if and only if it is cyclic. The result generalises a Problem proposed at the Romanian Olympiad of Mathematics in 2017.

Keywords: automorfisms, Dedekind groups, Hamiltonian groups, Abelian groups.

MSC 2010: 20D45, 20K01, 20K30.

Enunţul problemei menţionate în titlul articolului este următorul:

Problemă. Fie G un grup finit care are următoarea proprietate: pentru orice automorfism f al lui G, există un număr natural m astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Arătaţi că G este comutativ.

Mariean Andronache

În cele ce urmează vom nota cu (P) proprietatea de mai sus. Prezentăm, mai întâi, o soluţie a acestei probleme, diferită de cea din barem.

Soluţie. Observăm că proprietatea (P) implică

$$f(H) = H, \forall f \in \mathrm{Aut}(G), \forall H \leq G. \tag{1}$$

Considerând f automorfism interior al lui G, deducem că toate subgrupurile lui G sunt normale, adică G este grup Dedekind.

Presupunem prin absurd că G nu este abelian. Atunci, G este grup hamiltonian, deci există $n \in \mathbb{N}$ şi A un grup abelian de ordin impar, astfel încât $G \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_2^n \times A$, unde $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ este grupul cuaternionilor. Fie f automorfismul lui G definit prin $f(i,0,0) = (j,0,0), f(j,0,0) = (k,0,0), f(k,0,0) = (i,0,0), f(1,a,b) = (1,a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{Z}_2^n \times A$. Atunci, $f(\langle (i,0,0) \rangle) = \langle (j,0,0) \rangle \neq \langle (i,0,0) \rangle$, deci f nu satisface (1), o contradicţie. În concluzie, G este abelian.

Observaţie. Fie G un grup. Un automorfism f al lui G se numeşte *automorfism-putere*[2] dacă $f(H) = H, \forall H \leq G$. Mulţimea automorfismelor-putere ale lui G formează un subgrup normal în $\mathrm{Aut}(G)$, notat de regulă cu $\mathrm{Pot}(G)$ (a se vedea, spre exemplu, [3]). Un automorfism-putere f al lui G se numeşte *universal* dacă există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = x^m$, $\forall x \in G$. Utilizând această terminologie, putem reformula problema noastră în următorul mod: ,,Dacă toate automorfismele unui grup finit G sunt automorfisme-putere universale, atunci G este comutativ.''

[1]Facultatea de Matematică, Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza'', Iaşi, România; *tarnauc@uaic.ro*

[2],,power automorphism'' în engleză

Ne propunem, în continuare, să determinăm grupurile abeliene finite cu proprietatea (P). Este bine-cunoscut că un grup abelian finit G admite o descompunere în produs direct (sau, echivalent, sumă directă) de p-grupuri abeliene

$$G \cong G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k,$$

ceea ce implică

$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(G_k),$$

conform Lemei 2.1 din [**2**] (a se vedea, de asemenea, Teorema 3.2 din [**1**]). Deducem că

$$G \text{ are proprietatea (P)} \Leftrightarrow G_i \text{ are proprietatea (P)}, \forall\, i = 1, 2, ..., k\,, \tag{2}$$

şi, astfel, studiul poate fi redus la cazul p-grupurilor abeliene.

Lemă. *Fie G un p-grup abelian finit cu proprietatea* (P)*. Atunci G este ciclic.*

Demonstraţie. Din teorema de structură a grupurilor abeliene finite avem că G este de tipul

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}\,,$$

unde $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_r$. Presupunem prin absurd că G nu este ciclic, adică $r \geq 2$, şi considerăm automorfismul f al lui G definit prin

$$f(x_1, x_2, ..., x_{r-1}, x_r) = (x_1, x_2, ..., x_{r-1} + x_r, x_r),\ \forall\, (x_1, x_2, ..., x_{r-1}, x_r) \in G.$$

Atunci $f(\langle(0, 0, ..., 0, 1)\rangle) = \langle(0, 0, ..., 1, 1)\rangle \neq \langle(0, 0, ..., 0, 1)\rangle$, deci f nu satisface (1), o contradicţie. În concluzie, G este ciclic.

Lema anterioară şi relaţia (2) conduc la concluzia că un grup finit cu proprietatea (P) este ciclic. Reciproc, orice automorfism al unui grup ciclic $G \cong \mathbb{Z}_n$ este de tipul $f(x) = qx$, unde $(q, n) = 1$, deci G are proprietatea (P). Aşadar, am probat următorul rezultat:

Teoremă. *Un grup finit are proprietatea* (P) *dacă şi numai dacă este ciclic.*

Bibliografie

1. J.N.S. Bidwell, M.J. Curran, D.J. McCaughan – *Automorphisms of direct products of finite groups*, Arch. Math., 86 (2006), 481-489.
2. C. Hillar, D. Rhea – *Automorphisms of an abelian p-group*, Amer. Math. Monthly, 114 (2007), 917-922.
3. R. Schmidt – *Subgroup lattices of groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics 14, de Gruyter, Berlin, 1994.