Condiţii suficiente de inversabilitate pentru matrice

***I. CHIŢESCU*[1], *M. ŢENA*[2]**

Abstract. In this article we present some results regarding the invertibility of the matrices in the rings $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ and $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ within a natural general framework: the Banach algebras.

Keywords: matrix, algebra, Banach algebra, invertibility.

MSC 2010: 15A04, 15A09, 46H25, 46H99.

În acest articol prezentăm unele rezultate privind inversabilitatea matricelor din inelele $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ într-un cadru general, acela al algebrelor Banach. Pentru teoria algebrelor Banach cititorul interesat poate consulta [1] şi [2].

I. Pentru a expune rezultatele noastre, avem nevoie de câteva noţiuni privind *algebrele normate.* Presupunem cunoscute noţiunile de grup, inel, corp, spaţiu vectorial. Peste tot în această lucrare K desemnează unul din corpurile $\mathbb{R}$ (al numerelor reale) sau $\mathbb{C}$ (al numerelor complexe), iar spaţiile vectoriale considerate vor fi peste corpul K şi presupuse nenule.

O *algebră cu unitate* (*peste* K) este o structură $X(+,\cdot\,;u)$, unde $X(+)$ este un spaţiu vectorial peste K şi, în plus, $X(+,\cdot\,;u)$ este inel unitar (cu elementul unitate u) astfel încât: $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy)$, pentru orice $x, y \in X$ şi orice $\alpha, \beta \in K$ (se spune că înmulţirea în X este *biliniară* sau că structura de inel a lui X este *compatibilă* cu aceea de spaţiu vectorial).

Atragem atenţia asupra faptului că, deşi notăm la fel unele operaţii, ele pot avea semnificaţii diferite, în funcţie de structura în care lucrăm. Aşa de exemplu, în egalitatea precedentă, αx semnifică ,,înmulţirea externă" dintre ,,scalarul" $\alpha \in K$ şi ,,vectorul" $x \in X$, în timp ce xy este înmulţirea internă în inelul X dintre ,,vectorii" x şi y. Deoarece $X \neq \{0\}$, rezultă că în inelul X avem $u \neq 0$ (aici 0 este vectorul nul din X).

Notăm $U(X) = \{x \in X \mid x \text{ inversabil în inelul } X\}$. Dacă $X(+,\cdot\,;u)$ şi $Y(+,\cdot\,;v)$ sunt algebre cu unitate (pentru simplitate, am notat la fel adunarea şi înmulţirea în cele două algebre), spunem că o aplicaţie $H : X \longrightarrow Y$ este *izomorfism de algebre cu unitate* dacă H este bijecţie, $H(\alpha x) = \alpha H(x)$, $H(x + y) = H(x) + H(y)$, $H(xy) = H(x)H(y)$ pentru orice $x, y \in X$ şi orice $\alpha \in K$; subliniem că H surjecţie implică $H(u) = v$. Atragem şi aici atenţia că operaţiile din stânga sunt în X, iar cele din dreapta în Y. Remarcăm că $\mathcal{M}_n(K)(+,\cdot\,;I_n)$ este o algebră cu unitate (unitatea fiind matricea unitate I_n), iar, în cazul $n = 1$, avem $\mathcal{M}_1(K) = K$, care este o algebră cu unitatea 1. Mai precis, $\mathbb{R}$ este o algebră cu unitate peste $\mathbb{R}$, iar $\mathbb{C}$ este algebră cu unitate fie peste $\mathbb{C}$, fie peste $\mathbb{R}$.

Continuăm cu câteva noţiuni legate de *spaţii normate.* Fie $(X, +)$ un spaţiu vectorial. O aplicaţie $\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \|x\|$, se numeşte *normă* (*pe* X) dacă verifică proprietăţile:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (în membrul stâng este 0 din $\mathbb{R}$, iar în membrul drept este 0 din X);

[1]Prof. univ. dr., Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti; *ionchitescu@yahoo.com*

[2]Prof. dr., Colegiul Naţional ,,Sf. Sava", Bucureşti; *marceltzena@yahoo.com*

(*ii*) $\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\|$, pentru orice $x \in X$ şi orice $\alpha \in K$;

(*iii*) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, pentru orice $x, y \in X$ (în stânga avem o sumă de vectori, în dreapta o sumă de numere reale).

Intuitiv, $\|x\|$ reprezintă „lungimea" vectorului x, iar proprietăţile normei sunt inspirate de cele ale modulului. Anume, considerând algebra cu unitate $K(+,\cdot\,;1)$, aplicaţia $\| \; \| : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\|x\| = |x|$, este normă pe K.

Un cuplu $(X, \| \; \|)$, unde X este un spaţiu vectorial şi $\| \; \|$ o normă pe X, se numeşte *spaţiu normat*. O *algebră normată cu unitate* este o structură $X(+,\cdot\,;u, \| \; \|)$, unde:

a) $X(+,\cdot\,;u)$ este algebră cu unitate,

b) $(X, \| \; \|)$ este spaţiu normat,

c) $\|xy\| \leq \|x\| \; \|y\|$, pentru orice $x, y \in X$ (în stânga avem un produs în inelul X, iar în dreapta un produs de numere reale),

d) $\|u\| = 1$.

De exemplu, $K(+,\cdot\,;1, | \; |)$ este o algebră normată cu unitate.

Într-un spaţiu normat $(X, \| \; \|)$ putem defini noţiunea de *şir convergent.* Anume, un şir $(x_n)_n$ de elemente din X se numeşte *convergent* dacă există $x \in X$ cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x - x_n\| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$. Elementul x este unic şi se numeşte *limita şirului* $(x_n)_n$. Scriem $x = \lim\limits_n x_n$ sau $x_n \xrightarrow{n} x$. Analogia cu convergenţa şirurilor numerice este evidentă.

O noţiune mai generală decât aceea de şir convergent a fost introdusă de *Cauchy.* Anume, un şir $(x_n)_n$ din X se numeşte *şir Cauchy* (*Cauchy* îl numea *fundamental*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n(\varepsilon)$. Această definiţie este intrinsecă (nu uzează de elemente străine şirului).

Se vede imediat că orice şir convergent este şir Cauchy, dar reciproca poate fi falsă în anumite spaţii normate.

Numim *spaţiu Banach (spaţiu normat complet)* un spaţiu normat $(X, \| \; \|)$ în care orice şir Cauchy este convergent (adică, în care şirurile Cauchy coincid cu şirurile convergente). O teoremă fundamentală a Analizei Matematice este *Criteriul de Completitudine al lui Cauchy*: Spaţiul normat $(K, | \; |)$ este un spaţiu Banach.

O algebră normată cu unitate $X(+,\cdot\,;u, \| \; \|)$ care, ca spaţiu normat, este spaţiu Banach, se numeşte *algebră Banach cu unitate.*

Următorul rezultat este fundamental pentru cele ce urmează:

Teorema de inversabilitate. *Fie $X(+,\cdot\,;u, \| \; \|)$ o algebră Banach cu unitate şi $B(u,1) = \{x \in X \mid \|x - u\| < 1\}$ bila deschisă de centru u şi rază 1. Atunci:*

$$B(u,1) \subseteq U(X)$$

adică orice element „situat la distanţă mai mică decât 1" faţă de unitatea u este inversabil.

Demonstraţia se face observând că orice element $x \in B(u,1)$ are forma $x = u + y$ cu $\|y\| < 1$ şi construind inversul $x^{-1} = \lim\limits_n y_n$, unde $y_n = u - y + y^2 + ... + (-1)^n y^n$, existenţa limitei decurgând din faptul că $(y_n)_n$ este un şir Cauchy.

Condiţia $\|x - u\| < 1$ nu poate fi îmbunătăţită. De exemplu, pentru $x = 0$, avem $\|0 - u\| = 1$, dar $0 \notin U(X)$.

Cele mai ,,naturale" spaţii Banach sunt spaţiile $K^n = \underbrace{K \times K \times ... \times K}_{n\ ori}$ în care, reamintim, operaţiile de spaţiu vectorial se definesc ,,pe componente":
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$, pentru orice $x_i, y_i \in K$, $i = \overline{1, n}$ şi orice $\alpha \in K$.

Pe K^n putem defini o infinitate de norme şi se poate arăta că toate normele pe K^n sunt *echivalente*, adică generează aceleaşi şiruri convergente. Mai precis: dacă $(x^p)_p$ este un şir din K^n, $x^p = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$ şi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$, a spune că $x_p \xrightarrow{p} x$ înseamnă a spune că $x_i^p \xrightarrow{p} x_i$ pentru orice $i = \overline{1, n}$ (convergenţa este ,,pe componente"). Această echivalenţă are loc pentru orice normă $\| \ \|$ pe K^n şi, în plus, pentru orice normă, spaţiul $(K^n, \| \ \|)$ este spaţiu Banach.

O aplicaţie $T : K^n \longrightarrow K^n$ se numeşte *aplicaţie liniară* dacă

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

pentru orice $x, y \in K^n$ şi orice $\alpha, \beta \in K$.

Notăm $\mathcal{L}(K^n) = \{T : K^n \longrightarrow K^n \mid T \text{ este liniară}\}$ şi observăm că structura $\mathcal{L}(K^n)(+, \cdot\ ; u)$ este algebră cu unitate, unde operaţiile $+$ şi $\cdot$ şi produsul cu scalari se definesc prin:

$(S + T)(x) \overset{def}{=} S(x) + T(x)$ (suma funcţiilor),

$(ST)(x) \overset{def}{=} (S \circ T)(x) = S(T(x))$ (compunerea funcţiilor), pentru orice $S, T \in \mathcal{L}(K^n)$ şi orice $x \in K^n$ (unitatea fiind $u = 1_{K^n}$ = aplicaţia identică a spaţiului K^n),

$(\alpha T)(x) \overset{def}{=} \alpha T(x)$ (produsul unei funcţii cu o constantă), pentru orice $T \in \mathcal{L}(K^n)$ şi orice $\alpha \in K$.

Orice normă $\| \ \|$ pe K^n generează o algebră Banach cu unitate pe $\mathcal{L}(K^n)$, după cum urmează. Notăm $B_{\| \ \|} = \{x \in K^n \mid \|x\| \leq 1\}$ = bila unitate în norma $\| \ \|$ din K^n şi definim pentru orice $T \in \mathcal{L}(K^n)$:

$$\|T\|_0 = \sup\{\|T(x)\| \mid x \in B_{\| \ \|}\} \left(= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \right).$$

Se arată că $\|T\|_0 < \infty$ pentru orice $T \in \mathcal{L}(K^n)$ şi că aplicaţia $T \longmapsto \|T\|_0$ este o normă pe $\mathcal{L}(K^n)$ (numită *norma operatorială generată de norma* $\| \ \|$). Mai mult, se arată că $\mathcal{L}(K^n)(+, \cdot; 1_{K^n}, \| \ \|_0)$ este o algebră Banach cu unitate.

Norma operatorială $\| \ \|_0$ are următoarea proprietate fundamentală (exprimată în doi paşi), pentru orice $T \in \mathcal{L}(K^n)$:

a) $\|T(x)\| \leq \|T\|_0 \|x\|$ pentru orice $x \in K^n$;

b) Dacă $M > 0$ are proprietatea $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, pentru orice $x \in K^n$, atunci $M \geq \|T\|_0$.

Vom introduce acum un izomorfism de algebre Banach cu unitate $H : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}(K^n)$ după cum urmează: pentru $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, considerăm $T \in \mathcal{L}(K^n)$, $T(x) = y$, unde pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$, luăm $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$, cu

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (*)$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$. Definim atunci $H(A) = T$.

Egalitatea $(*)$ este echivalentă cu scrierea matriceală $y = Ax$, unde y şi x sunt gândite ca matrice coloane, adică:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Faptul că $H : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}(K^n)$ este izomorfism de algebre cu unitate este lăsat cititorului ca exerciţiu. Izomorfismul H identifică practic pe $\mathcal{M}_n(K)$ cu $\mathcal{L}(K^n)$, iar prin această identificare elementele inversabile se corespund. Izomorfismul H de mai sus induce pe $\mathcal{M}_n(K)$ o structură de algebră Banach cu unitate pentru orice normă $\| \ \|$ pe K^n. Procedeul este un *transport de structură*. Anume, pentru o normă $\| \ \|$ pe K^n, considerăm norma operatorială $\| \ \|_0$ generată de $\| \ \|$ pe $\mathcal{L}(K^n)$. Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definim numărul $\|A\|_0 \overset{def}{=} \|H(A)\|_0$ şi se arată că aplicaţia $A \longmapsto \|A\|_0$ este o normă pe $\mathcal{M}_n(K)$ (numită *norma matriceală generată de norma* $\| \ \|$), iar $\mathcal{M}_n(K)(+, \cdot\, ; I_n, \| \ \|_0)$ este algebră Banach cu unitate. Subliniem şi aici că am notat la fel norma matriceală şi norma operatorială.

Concret, vom prezenta normele $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pe K^n. În acest scop, fie $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$.

– Dacă $1 \leq p < \infty$, definim $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (în cazul $K = \mathbb{R}$ şi $p = 2$ avem *norma euclidiană* $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$).

– Dacă $p = \infty$, definim $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \left(= \lim\limits_{p \longrightarrow \infty} \|x\|_p \right)$.

Pentru $1 \leq p \leq \infty$ definim *conjugatul q al lui p* prin relaţia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cu convenţia $\frac{1}{\infty} = 0$. Prin urmare: $1 < p < \infty \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$; $p = \infty \Rightarrow q = 1$; $p = 1 \Rightarrow q = \infty$; $p = 2 \Rightarrow q = 2$ (2 este autoconjugat).

Pentru orice $1 \leq p \leq \infty$ şi orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ în K^n se verifică *inegalitatea lui Hölder*: $|(x, y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, unde $(x, y) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

II. Trecem la prezentarea rezultatelor noi.

În primul rând vom „rescrie” Teorema de inversabilitate în următorul mod:

Teorema de inversabilitate (varianta matriceală). *Fie $\| \ \|$ o normă pe $\mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $\mathcal{M}_n(K)$ devine algebră Banach cu unitate pentru această normă. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $\|A\| < 1$, avem $I_n + A \in U(\mathcal{M}_n(K))$, adică $I_n + A$ este o matrice inversabilă.*

Într-adevăr: $\|(I_n + A) - I_n\| = \|A\| < 1$ şi suntem în condiţiile teoremei (generale) de inversabilitate.

În al doilea rând, vom prezenta o proprietate a normei $\| \|_0$. Am văzut că o normă $\| \|$ pe K^n generează norma operatorială $\| \|_0$ pe $\mathcal{L}(K^n)$ şi norma $\| \|_0$ pe $\mathcal{M}_n(K)$. Pentru $A \in \mathcal{M}_n(K)$ notăm $H(A) = T \in \mathcal{L}(K^n)$, unde $H : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{L}(K^n)$ este izomorfismul considerat de algebre Banach cu unitate. Se ştie că există $M > 0$ cu proprietatea $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ pentru orice $x \in K^n$. Pentru orice astfel de număr $M > 0$ am văzut că

$$M \geq \|T\|_0 = \|A\|_0.$$

Introducem acum o notaţie specială. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, notăm cu $L(i)$ linia i a matricei A, adică $L(i) = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in K^n$. Pentru $1 \leq p \leq \infty$ putem forma vectorul din K^n cu elemente pozitive: $(\|L(1)\|_p, \|L(2)\|_p, ..., \|L(n)\|_p) \in K^n$. Avem, în acest context:

Teorema 1. *Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ şi $1 \leq p \leq \infty$, iar q conjugatul lui p. Considerăm norma matriceală $\| \|_0$ pe $\mathcal{M}_n(K)$ generată de norma $\| \|_p$. Are loc inegalitatea:*

$$\|A\|_0 \leq \|(\|L(1)\|_q, \|L(2)\|_q, ..., \|L(n)\|_q)\|_p .$$

Demonstraţie. Notăm $H(A) = T \in \mathcal{L}(K^n)$. Pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$, fie $T(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$. Relaţia $(*)$ arată că, pentru $1 \leq i \leq n$, avem:

$$y_i = (L(i), x) \qquad (**)$$

şi vom folosi acest fapt pentru a analiza toate cazurile după p.

1. Cazul $p = 1$ $(q = \infty)$. Din $(**)$ şi inegalitatea lui Hölder rezultă că, pentru toţi $1 \leq i \leq n$ şi orice $x \in K^n$, avem:

$$|y_i| \leq \|L(i)\|_\infty \|x\|_1 = (\max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|)\|x\|_1.$$

Deducem că: $\|T(x)\|_1 = \|y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|L(i)\|_\infty\right) \|x\|_1 =$ $\|(\|L(1)\|_\infty, \|L(2)\|_\infty, ..., \|L(n)\|_\infty)\|_1 \|x\|_1$, deci

$$\|A\|_0 \leq \|(\|L(1)\|_\infty, \|L(2)\|_\infty, ..., \|L(n)\|_\infty)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\leq j\leq n} |a_{ij}|. \tag{1}$$

2. Cazul $p = \infty$ $(q = 1)$. Din $(**)$ şi inegalitatea lui Hölder, avem că: $|y_i| \leq \|L(i)\|_1 \|x\|_\infty = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|x\|_\infty$. Deducem că: $\|T(x)\|_\infty = \|y\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i| \leq$ $\left(\max\limits_{1\leq i\leq n} \|L(i)\|_1\right) \|x\|_\infty = \|(\|L(1)\|_1, \|L(2)\|_1, ..., \|L(n)\|_1)\|_\infty \|x\|_\infty$, deci

$$\|A\|_0 \leq \|(\|L(1)\|_1, \|L(2)\|_1, ..., \|L(n)\|_1)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{2}$$

3. Cazul $1 < p < \infty \left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$. Din $(**)$ şi inegalitatea lui Hölder, avem:

$$|y_i^p| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^p \le \left[\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \|x\|_p^p.$$

Aşadar: $\|T(x)\|_p^p = \|y\|_p^p = \sum\limits_{i=1}^n |y_i|^p \le \left(\sum\limits_{i=1}^n \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right) \|x\|_p^p$, prin urmare

$$\|T(x)\|_p = \|y\|_p \le \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_p.$$

Pentru orice $i = 1, 2, ..., n$ avem $\|L(i)\|_q = \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, deci $\|T(x)\|_p =$

$\|y\|_p \le \left(\sum\limits_{i=1}^n \|L(i)\|_q^p\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_p = \left\|(\|L(1)\|_q, \|L(2)\|_q, ..., \|L(n)\|_q)\right\|_p \|x\|_p.$

Atunci:

$$\|A\|_0 \le \left\|(\|L(1)\|_q, \|L(2)\|_q, ..., \|L(n)\|_q)\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Caz particular p=2 (q=p=2). Relaţia (3) devine

$$\|A\|_0 \le \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3'}$$

Teorema 2. *Fie* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$*, despre care presupunem că are (cel puţin) una din următoarele proprietăţi:*

(P_1)*:* $E_1 \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^n \max\limits_{1\le j\le n} |a_{ij}| < 1$*;*

(P_2)*:* $E_\infty \stackrel{def}{=} \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$*;*

(P_3)*: Există* $1 < p < \infty$ *astfel încât* $E_p \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^n \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}} < 1$*, unde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

În particular, dacă $p = 2$*,* (P_3) *devine* (P_3')*:* $E_2 \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2 < 1$*. Atunci, matricea* $I_n + A$ *este inversabilă.*

Demonstraţie. Folosind una din proprietăţile (P_i), $i = 1, 2, 3$, deducem cu una din relaţiile $(1), (2), (3)$ din demonstraţia Teoremei 1, că $\|A\|_0 < 1$, unde $\| \ \|_0$ este norma pe $\mathcal{M}_n(K)$ generată de una din normele $\| \ \|_i$, $i = 1, \infty, p$ pe K^n. Apoi se aplică varianta matriceală a teoremei de inversabilitate.

Consideraţii elementare în cazul $n = 2$.

1. Condiţiile $(P_1), (P_2), (P_3)$ nu pot fi îmbunătăţite. În acest sens, să considerăm, în cazul $n = 2$, matricea $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se constată că pentru această matrice A avem $E_1 = E_\infty = E_p = 1$, pentru orice $1 < p < \infty$ (şi, de altfel, $\|A\|_0 = 1$, unde $\| \ \|_0$ este generată de $\| \ \|_2$), iar matricea $I_2 + A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

2. În cazul $n = 2$ şi $K = \mathbb{R}$, putem da o demonstraţie elementară a implicaţiei $(P_3') \Rightarrow I_2 + A$ inversabilă, adică $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 < 1 \Rightarrow I_2 + A$ inversabilă. (Acest rezultat îmbunătăţeşte enunţul *Problemei S:L 17.118* din Suplimentul cu exerciţii al G.M. 3 /2017, autor *Cornel Băeţica*, unde în membrul drept al inegalităţii din ipoteză apare $\frac{1}{5}$).

Avem $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$. Presupunem, prin absurd, că $I_2 + A$ nu este inversabilă, deci $\det(I_2 + A) = 0$, adică $(1 + a_{11})(1 + a_{22}) = a_{12}a_{21}$ (4).
Din ipoteza (P_3') rezultă $a_{ij}^2 < 1$, deci $a_{ij} \in (-1, 1)$ pentru orice $i, j \in \{1, 2\}$.
Din (4) rezultă atunci $a_{22} = -1 + \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1}$ şi avem:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 - 1 = a_{11}^2 + (a_{12}^2 + a_{21}^2) + a_{22}^2 - 1 \geq a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2 - 1 =$$
$$= a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + \left(-1 + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1}\right)^2 - 1 = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21}\left(1 - \frac{1}{a_{11} + 1}\right) +$$
$$+ \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1}\right)^2 = a_{11}^2 + 2a_{11}\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1} + \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1}\right)^2 = \left(a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11} + 1}\right)^2 \geq 0,$$

de unde $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 1$, ceea ce contrazice ipoteza (P_3').

Bibliografie

1. R. Cristescu - *Analiză funcţională* (ediţia a III-a), Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979.

2. A. Ghika - *Analiza funcţională*, Ed. Acad. R.S. România, Bucureşti, 1967.