Asupra unor inegalităţi algebrice

M. CUCOANEŞ,[1] *M. DRĂGAN*,[2]
N. STANCIU[3]

Abstract. In this paper we present a class of algebraic inequalities.
Keywords: algebraic inequalities.
MSC: 08A20.

I. În [1] este demonstrată următoarea inegalitate a lui **Pham Hun Duc**:

$$x+y+z+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{6(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}, \forall x,y,z>0. \tag{1}$$

În continuare, ne propunem să vedem dacă pot fi formulate şi alte inegalităţi de acest tip.

Problema 1. *Să se determine numerele naturale $n\geq 2$ astfel încât inegalitatea*

$$x_1+x_2+...+x_n+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+...+\frac{x_n^2}{x_1}\geq 2n\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{x_1+x_2+...+x_n}, \tag{2}$$

să fie adevărată pentru orice numere strict pozitive $x_1,x_2,...,x_n$.

Soluţie. Considerăm $x_1=x_2=x>\frac{1}{3}$, $x_3=x_4=...=x_n=1$. Rezultă $\frac{x^3+3x^2-5x+1}{x}+2n\geq\frac{4nx^2+2n^2-4n}{2x-2+n}$ sau, după efectuarea calculelor,

$$\frac{(x-1)^2}{x}\left[2(x^2+4x-1)-n(3x-1)\right]\geq 0\Leftrightarrow n\leq\frac{2(x^2+4x-1)}{3x-1}.$$

Considerăm funcţia $f:\left(\frac{1}{3},+\infty\right)\to R$, $f(x)=\frac{2(x^2+4x-1)}{3x-1}$, cu derivata

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(3x+1)}{(3x-1)^2}.$$

Studiind semnul derivatei, rezultă că $f(x)\geq f(1)=4$. Deducem că $n\leq\min\limits_{x>\frac{1}{3}}f(x)=4$, prin urmare inegalitatea (2) ar putea fi adevărată doar pentru $n\in\{2,3,4\}$.

Pentru $n=2$, demonstrăm

$$x_1+x_2+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}\geq\frac{4(x_1^2+x_2^2)}{x_1+x_2},\ \forall x_1,x_2>0. \tag{3}$$

[1] Profesor, Liceul Tehnologic ,,Eremia Grigorescu", Mărăşeşti
[2] Profesor, Liceul ,,Mircea cel Bătrân", Bucureşti
[3] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,G.E. Palade", Buzău

Notăm $x_1{+}x_2 = S$, $x_1x_2 = P$. Inegalitatea (3) se scrie echivalent $\left(\frac{S^2}{P}-2\right)\left(\frac{S^2}{P}-4\right) \geq 0$, adevărată deoarece $\frac{S^2}{P} \geq 4$.

Cazul $n = 3$ este chiar inegalitatea (3).

Rămâne de studiat cazul $n = 4$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1} \geq \frac{8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}.$$

Considerăm în această relaţie $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2^2}$, $x_4 = \frac{1}{2^3}$ şi obţinem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^6} - \frac{8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}} = -\frac{53}{192}$, contradicţie!

Deci, inegalitatea din enunţ este adevărată pentru $n \in \{2, 3\}$.

II. În [4] este demonstrată inegalitatea

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}, \forall x, y, z > 0. \tag{4}$$

În [2], **Pham Kim Hung** demonstrează inegalitatea

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt[4]{27(x^4 + y^4 + z^4)}, \forall x, y, z > 0. \tag{5}$$

Din nou, ne propunem să vedem dacă pot fi formulate şi alte inegalităţi de acest tip.

Problema 2. *Să se determine numerele $n \in \mathbb{N}$ pentru care este adevărată inegalitatea*

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)^n \geq 3^{n-1}(x^n + y^n + z^n). \tag{6}$$

Soluţie. Considerăm $x = 1, y = \frac{9}{10}, z = \left(\frac{9}{10}\right)^2$ şi aducem totul în stânga; obţinem că

$$E(n) = 3\left[\frac{19}{9} + \left(\frac{9}{10}\right)^4\right]^n - 3^n - \left(\frac{27}{10}\right)^n - \left(\frac{243}{100}\right)^n \geq 0.$$

Cu ajutorul calculatorului, găsim că $E(n) < 0$ pentru $n > 6,93$. Deducem că $n \leq 6$.

Demonstrăm că, în general,

$$\sqrt[n+1]{3^n(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1})} \geq \sqrt[n]{3^{n-1}(x^n + y^n + z^n)} \Leftrightarrow$$

$$3(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1})^n \geq (x^n + y^n + z^n)^{n+1}. \tag{7}$$

Din inegalitatea lui Hölder

$$(a_1^p + b_1^p + c_1^p)^{\frac{1}{p}}(a_2^q + b_2^q + c_2^q)^{\frac{1}{q}} \geq (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2), \text{unde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

pentru $p = \dfrac{n+1}{n}, q = n+1, a_1 = x^n, b_1 = y^n, c_1 = z^n, a_2 = b_2 = c_2 = 1$, rezultă (7). Deci, pentru a demonstra cazurile $n \leq 4$ este suficient să demonstrăm cazul $n = 4$:

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)^4 \geq 3^3(x^4 + y^4 + z^4), \ \forall x, y, z > 0. \tag{8}$$

Din (4) avem

$$\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{6\sum x}{\sum x^2} - \sum x.$$

Notăm $\sigma_1 = \sum x$, $\sigma_2 = \sum xy$, $\sigma_3 = xyz$. Observăm că $t = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \geq 3$, iar

$$x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2.$$

Deci, pentru a demonstra (8), este suficient să demonstrăm că

$$\left(\frac{5\sigma_1^2 - 12}{\sigma_1}\right)^4 \geq 27(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2).$$

Deoarece $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \geq \sigma_3$, este suficient să arătăm că $\left(5\sigma_1^2 - 12\right)^4 \geq 27\sigma_1^4(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4 \cdot \dfrac{\sigma_2^2}{3} + 2\sigma_2^2) \Leftrightarrow (5t+2)^4 \geq 27t^2\left(t^2 - 4t + \dfrac{10}{3}\right) \Leftrightarrow 2(t-3)^2(299t^2 - 1152t + 1152) \geq 0$, adevărată pentru orice $t \geq 3$.

Lăsăm ca problemă deschisă rezolvarea cazurilor $n \in \{5, 6\}$.

III. În [2] este propusă inegalitatea (**Marian Cucoaneş** şi **Leonard Giugiuc**): *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că*

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{7(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + yz + zx)}. \tag{9}$$

În [5], **Titu Zvonaru** propune următoarea inegalitate mai generală:
Să se determine o valoare cât mai mare a numărului real pozitiv k pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{(7+k)(x^2 + y^2 + z^2) - (4+k)(xy + yz + zx)}. \tag{10}$$

În [5] se demonstrează că există $k_0 \in (0,7551; 0,7552)$ pentru care inegalitatea (10) este adevărată.

În continuare vom arăta că, pentru $k_0 = 2$, inegalitatea (10) este adevărată.

Problema 3. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că*

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{9(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx)}. \tag{11}$$

Soluţie. Notăm $\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+yz+zx, \sigma_3 = xyz$.

Inegalitatea (1) este echivalentă cu $\sum \frac{x^2}{y} \geq \frac{5\sigma_1^2 - 12\sigma_2}{\sigma_1}$, deci pentru a demonstra (11) este suficient să demonstrăm că $(5\sigma_1^2 - 12\sigma_2)^2 \geq \sigma_1^2[9(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 6\sigma_2]$ sau, după efectuarea calculelor, $(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^2 \geq 0$, adevărat.

Se poate vedea că, dacă (10) este adevărată pentru o anumită valoare a lui k, fie aceasta $k_0 > 0$, atunci este adevărată şi pentru $k \in [0, k_0]$.

Se pune întrebarea dacă există valori ale lui k, strict mai mari ca 2, pentru care (10) să fie adevărată. Sprijinindu-ne pe inegalitatea (1), nu putem găsi astfel de valori.

Dacă în (10) considerăm $y = z = 1$, obţinem $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 7(x^2+2) - 4(2x+1) + k(x^2 - 2x + 1)$, deci

$$k \leq \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x + 1}{x^2}.$$

Considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x + 1}{x^2}$, cu derivata

$$f'(x) = \frac{2(x^4 + x^3 - 2x - 1)}{x^3}.$$

Obţinem $k_0 = \min\limits_{x>0} f(x) = \dfrac{1}{4}\left(-13 + 5\sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{\frac{151}{2} + \frac{75\sqrt{5}}{2}}\right) \cong 5,85683$ şi se atinge în $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \cong 1,1537$.

Rămâne ca problemă deschisă dacă există o constantă mai bună decât 2 în intervalul $(2, k_0]$ pentru care (10) să fie adevărată.

Bibliografie

1. V. Cârtoaje, *Algebraic inequalities, Old and New Methods*, GIL Publishing House, 2006, 458.

2. M. Cucoaneş, L. Giugiuc, *Problema L302*, Recreaţii Matematice, Nr. 1, 2016, 89.

3. Pham Kim Hung, *Secrets in inequalities*, Vol. 1, GIL Publishing House, 2007, 204.

4. T. Zvonaru, N. Stanciu, *Bergström sau Hölder*, Revista de Matematică din Timişoara, Nr. 4, 2013, 10-12.

5. T. Zvonaru, Recreaţii Matematice, Nr. 2, 2016, 170-171.