În legătură cu o identitate în triunghi din revista Curierul Matematic (1925-1928)

Marin CHIRCIU[1]

Abstract. In this Note, by use of the identity (∗) as a starting point, the author establishes a number of geometric inequalities.

Keywords: altitude, perimeter, inradius, circumradius, Gerretsen′s inequality, Hölder′s inequality.

MSC 2010: 51M04.

În *Curierul Matematic*, **C. I. Ionescu-Bujor** [**1**] propune următoarea identitate geometrică valabilă în orice triunghi ABC (notaţii uzuale):

$$(*) \qquad \frac{a}{h_a}\cdot \operatorname{ctg} A+\frac{b}{h_b}\cdot \operatorname{ctg} B+\frac{c}{h_c}\cdot \operatorname{ctg} C=2.$$

Soluţie. $\sum \frac{a}{h_a}\cdot \operatorname{ctg} A=\sum a\cdot \frac{a}{2S}\cdot \frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1}{2S}\sum a^2\cdot \frac{2R}{a}\cdot \cos A=\frac{R}{S}\sum a\cos A=\frac{R}{S}\cdot \frac{2rp}{R}=2.$

În acest articol sunt discutate identităţi şi inegalităţi pentru sume asemănătoare cu cele din (∗). Considerăm că sunt cunoscute următoarele inegalităţi geometrice în triunghi, frecvent utilizate mai jos: 1) E: $R\geq 2r$ (*Euler*), 2) G: $16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ (*Gerretsen*), 3) M: $3\sqrt{3}r\leq p\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (*Mitrinović*), 4) D: $4R+r\geq \sqrt{3}p$,. 5) L: $\sum \frac{1}{a}\geq \frac{\sqrt{3}}{R}$ (*Leuenberger*); menţionăm că în oricare dintre ele avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral. De asemenea, vor fi utilizate şi inegalităţile algebrice: 1) CBS - *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, 2) C - *Cebâşev*, 3) H - *Hölder*, 4) R: $\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{x_k^{m+1}}{y_k^m}\geq \left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k\right)^{m+1}/\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}y_k\right)^m$, $x_k, y_k, m\in \mathbb{R}_+$ (*Radon*).

a) Sume de forma $\sum \frac{a}{h_a}\cdot f(A)$, unde f notează aici, ca şi peste tot în articol, una dintre funcţiile trigonometrice.

1. $\sum \frac{a}{h_a}\cdot \operatorname{tg} A\geq 6$, *în orice triunghi ascuţitunghic.* Într-adevăr, avem:

$$\sum \frac{a}{h_a}\cdot \operatorname{tg} A=\sum \frac{a^2}{2S}\cdot \frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{4RS}\sum \frac{a^3}{\cos A}\overset{H}{\geq} \frac{1}{4RS}\frac{(a+b+c)^3}{3\sum \cos A}=$$

$$\frac{8p^3}{12Rrp}\cdot \frac{R}{R+r}=\frac{2p^2}{3r\left(R+r\right)}\overset{G}{\geq} \frac{2\left(16Rr-5r^2\right)}{3r\left(R+r\right)}=\frac{2\left(16R-5r\right)}{3\left(R+r\right)}\overset{E}{\geq} 6.$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Zinca Golescu", Piteşti; *marin.chirciu@yahoo.com*

2. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sin A \geq 3$, *în orice triunghi.* Avem:

$$\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sin A = \frac{1}{4RS} \sum a^3 = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr} \overset{G}{\geq} \frac{5R - 4r}{R} \overset{E}{\geq} 3.$$

3. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \cos A \leq \frac{9R^2}{4rp}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

$$\sum \frac{a}{h_a} \cdot \cos A = \frac{1}{2S} \sum a^2 \cos A \overset{C}{\leq} \frac{1}{2rp} \cdot \frac{1}{3} \sum a^2 \sum \cos A \leq \frac{1}{2rp} \cdot \frac{1}{2} \sum a^2 \leq \frac{9R^2}{4rp}.$$

4. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sec A \geq 4\sqrt{3}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

$$\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sec A = \frac{1}{2S} \sum \frac{a^2}{\cos A} \overset{CBS}{\geq} \frac{1}{2rp} \cdot \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum \cos A} = \frac{2p}{r} \cdot \frac{R}{R + r} \overset{M}{\geq} \frac{6\sqrt{3}R}{R + r} \overset{E}{\geq} 4\sqrt{3}.$$

5. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \operatorname{cosec} A = \frac{2R}{r} \geq 4$, *în orice triunghi.* Se verifică printr-un calcul simplu.

b) Sume de forma $\sum \frac{a}{h_a} \cdot f(B) f(C)$. Următoarele şase inegalităţi sunt consecinţe imediate ale celor anterioare, deoarece $\sum \frac{a}{h_a} \cdot f(B) f(C) = f(A) f(B) f(C) \cdot \sum \frac{a}{h_a} \cdot \frac{1}{f(A)}$.

6. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \geq 6 \prod \operatorname{ctg} A$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

7. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2 \prod \operatorname{tg} A \geq 6\sqrt{3}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

8. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sin B \sin C = \frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, *în orice triunghi.*

9. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \cos B \cos C \geq 4\sqrt{3} \prod \cos A = \frac{\sqrt{3}}{R^2} \left[p^2 - (2R + r)^2\right]$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

10. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \sec B \sec C \leq \frac{9R^4}{rp\left[p^2 - (2R + r)^2\right]}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

11. $\sum \frac{a}{h_a} \cdot \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C \geq \frac{6R^2}{rp}$, *în orice triunghi.*

c) Sume de forma $\sum \frac{h_a}{a} \cdot f(A)$**.**

12. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{ctg} A \geq \frac{3}{2}$, *în orice triunghi.*

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{ctg} A = 2S \sum \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 4RS \sum \frac{1}{a^3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}-2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a^2} - 6\right) \geq \frac{3}{2}.$$

13. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{tg} A \geq \frac{9}{2}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{tg} A = 2S \sum \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{S}{R} \sum \frac{1}{a\cos A} \geq \frac{S}{R} \cdot \frac{9}{\sum a\cos A} = \frac{S}{R} \cdot \frac{9R}{2S} = \frac{9}{2}.$$

14. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sin A = \frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2} \geq 9\left(\frac{r}{R}\right)^2$, *în orice triunghi.* Avem:

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sin A = 2S \sum \frac{1}{a^2} \cdot \sin A = \frac{S}{R} \cdot \sum \frac{1}{a} = \frac{S}{R} \cdot \frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp} =$$

$$\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2} \overset{G}{\geq} \frac{5Rr-r^2}{R^2} \overset{E}{\geq} 9\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

sau rezolvarea:

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sin A = \frac{S}{R} \cdot \sum \frac{1}{a} \overset{L}{\geq} \frac{rp}{R} \cdot \frac{\sqrt{3}}{R} \overset{M}{\geq} 9\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

15. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \cos A = \frac{p^4 - 8Rrp^2 - r^2(4R+r)^2}{8R^2rp} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{R}$, *în orice triunghi.*

$$\begin{aligned}
\sum \frac{h_a}{a} \cdot \cos A &= \frac{S}{abc} \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{a} = \frac{1}{4R} \sum \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a} - 2a\right) = \\
&= \frac{1}{4R}\left(\sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a} - 4p\right) = \\
&\frac{1}{4R}\left[2\left(p^2-r^2-4Rr\right) \cdot \frac{p^2+r^2+4Rr}{4Rrp} - 4p\right] = \\
&= \frac{p^4-8Rrp^2-r^2(4R+r)^2}{8R^2rp} \overset{G}{\geq} \\
&\frac{\left(16Rr-5r^2\right)^2 - 8Rr\left(16Rr-5r^2\right) - r^2(4R+r)^2}{8R^2rp} = \\
&= \frac{r\left(28R^2-32Rr+6r^2\right)}{2R^2p} \overset{(+)}{\geq} \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{R},
\end{aligned}$$

deoarece $(+) \Leftrightarrow 28R^2 - 32Rr + 6r^2 \geq 3R \cdot p\sqrt{3} \overset{D}{\Leftarrow} 28R^2 - 32Rr + 6r^2 \geq 3R(4R+r) \Leftrightarrow (R-2r)(16R-3r) \overset{E}{\geq} 0.$

16. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sec A \geq \frac{6rp}{R(R+r)}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sec A = 2S \sum \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\cos A} \overset{CBS}{\geq} 2S \cdot \frac{\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2}{\sum \cos A} \overset{L}{\geq} 2S\left(\frac{\sqrt{3}}{R}\right)^2 \cdot \frac{R}{R+r} = \frac{6rp}{R(R+r)}.$$

17. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{cosec} A \geq \frac{6r}{R}$, *în orice triunghi.* Avem:

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{cosec} A = 4RS \sum \frac{1}{a^3} \overset{R}{\geq} 4rpR \cdot \frac{(1+1+1)^4}{(a+b+c)^3} = 81Rr \cdot \frac{1}{2p^2} \overset{M}{\geq} \frac{6r}{R}.$$

d) Sume de forma $\sum \frac{h_a}{a} \cdot f(B) f(C)$. Următoarele inegalităţi sunt consecinţe ale celor de la numerele 12-17.

18. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \geq \frac{3}{2} \prod \operatorname{tg} A \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

19. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \geq \frac{9}{2} \prod \operatorname{ctg} A$, *în orice triunghi ascuţitunghic.*

20. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sin B \sin C \geq \frac{6r}{R} \prod \sin A = \frac{3r^2p}{R^3}$, *în orice triunghi.*

21. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \cos B \cos C \geq \frac{6rp}{R(R+r)} \prod \cos A = \frac{3rp\left[p^2 - (2R+r)^2\right]}{2R^3(R+r)}$, *în orice triunghi.*

22. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \sec B \sec C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \prod \sec A \geq \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{r}{R}$, *în orice triunghi.*

23. $\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2rp} \geq 2\sqrt{3}$, *în orice triunghi.*

$$\sum \frac{h_a}{a} \cdot \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C = \prod \operatorname{cosec} A \cdot \sum \frac{h_a}{a} \cdot \sin A \overset{14}{=} \frac{2R^2}{rp} \cdot \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} =$$

$$\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2rp} \overset{(++)}{\geq} 2\sqrt{3},$$

deoarece avem: $(++) \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr \geq 4r \cdot p\sqrt{3} \overset{D}{\Leftarrow} p^2 + r^2 + 4Rr \geq 4r \cdot (4R + r) \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr + 3r^2 \overset{G}{\Leftarrow} p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq 12Rr + 3r^2$ (ultima inegalitate fiind, după calcul, $R \geq 2r$).

Observaţie. În toate inegalităţile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Bibliografie

1. **C.I. Ionescu-Bujor** – *Problema 62*, Curierul Matematic, vol. I, 8/1925.
2. **O. Bottema, R.Ž. Djordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić** – *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.
3. **D. Brânzei, G. Popa, M. Chirciu, Gh. Iurea, J. Grigoraş** – *Geometrie şi Trigonometrie*, Editura Tiparg, Piteşti, 2004.
4. **M. Chirciu** – *Inegalităţi geometrice, de la iniţiere la performanţă*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2016.