ARTICOLE ŞI NOTE

Conice şi cercuri tangente

Ioan POP[1]

Abstract. It proves how to obtain the non-degenerate conics, ellipse, hyperbola and parabola, of some basic tangent problems.

Keywords: circle, ellipse, hyperbola, parabola.

MSC 2010: 51M04, 97G40.

Introducere. Nota de faţă prezintă conicele propriu-zise - elipsa, hiperbola şi parabola - ca locuri geometrice provenite din proprietăţi de tipul acelora cu care elevii s-au mai întâlnit: locul geometric al centrelor cercurilor tangente la două cercuri de raze egale sau la două cercuri concentrice. Dacă cercurile nu au raze egale sau un cerc se înlocuieşte cu o dreaptă, răspunsul nu mai este atât de evident, dar poate fi obţinut cu mijloace elementare. Autorul este de părere că rezultatele din această notă nu sunt noi - ele aparţin probabil folclorului matematic -, dar nu cunoaşte un material privind acest subiect pe care să-l poată recomanda. Pe de altă parte, autorul consideră că o asemenea temă reprezintă atât un îndemn spre studiul conicelor, cât şi un bun exemplu de trecere de la geometria elementară la cea analitică.

Elipsa

Notăm cu $C(O,R)$ un cerc din planul euclidian de centru O şi rază R şi cu $d(A,B)$ distanţa euclidiană dintre punctele A şi B.

Teorema 1. *Fie cercurile distincte $C_1(O_1,R_1)$ şi $C_2(O_2,R_2)$ astfel încât (C_1) să fie interior cercului (C_2). Atunci, locul geometric al centrelor cercurilor tangente celor două cercuri, interior lui (C_2) şi exterior lui (C_1), este elipsa (E) cu focarele în punctele O_1 şi O_2 şi cu semiaxa mare de lungime $\dfrac{R_1+R_2}{2}$.*

Demonstraţie. Fie $\Gamma(O_\Gamma,R_\Gamma)$ un cerc tangent celor două cercuri. Punctul O_Γ fiind interior lui (C_2) şi exterior lui (C_2), avem:

$$d(O_2,O_\Gamma)=R_2-R_\Gamma \text{ şi } d(O_1,O_\Gamma)=R_1+R_\Gamma.$$

Prin adunarea acestor relaţii deducem relaţia

$$d(O_\Gamma,O_1)+d(O_\Gamma,O_2)=R_1+R_2.$$

Prin urmare punctele O_Γ aparţin elipsei (E) din enunţ.

Pentru a stabili incluziunea reciprocă, aceea că orice punct al elipsei este un punct al locului geometric, să arătăm mai întâi că toată elipsa este situată în interiorul lui (C_2) şi în exteriorul lui (C_1). Utilizăm notaţiile din Fig.1.

---

[1] Prof.univ.dr., Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza", Iaşi; *ioanpop@mail.uaic.ro*

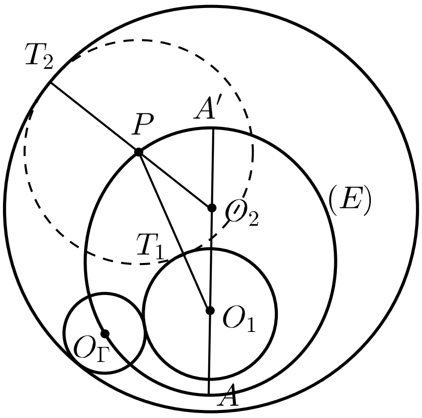

Fig. 1

Punctul A al elipsei (E) este cel mai îndepărtat de punctul O_2 şi cel mai apropiat de punctul O_1. Avem: $d(A, O_2) = \dfrac{R_1 + R_2}{2} + \dfrac{d(O_1, O_2)}{2}$. Deoarece $d(O_1, O_2) + R_1 < R_2$ (cercul (C_1) fiind interior cercului (C_2)), deducem că $d(A, O_2) < R_2$, astfel că (E) este inclusă în interiorul cercului (C_2). Apoi, $d(A, O_1) = \dfrac{R_1 + R_2}{2} - \dfrac{d(O_1, O_2)}{2} > R_1$ (din aceeaşi inegalitate de mai sus). Astfel, toate punctele elipsei (E) sunt în afara cercului (C_1). Fie acum P un punct arbitrar al elipsei (E). Semidreapta $[O_1P$ intersectează (C_1) într-un punct T_1 iar semidreapta $[O_2P$ intersectează (C_2) într-un punct T_2. Avem $d(P, T_1) = d(P, O_1) - R_1 = 2a - d(P, O_2) - R_1 = R_2 - d(P, O_2) = d(P, T_2)$. Astfel, cercul $C(P, d(P, T_1))$ este tangent exterior lui (C_1) şi tangent interior lui (C_2), ceea ce arată că P este un punct al locului. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Observaţie. În condiţiile teoremei pentru cercurile date, dacă cercul mobil (Γ) ar fi tangent cercurilor (C_1) şi (C_2), interior lui (C_2) şi având în interiorul lui pe (C_1), atunci am avea că $d(O_\Gamma, O_1) + d(O_\Gamma, O_2) = R_2 - R_1$, iar locul centrului O_Γ ar fi elipsa cu aceleaşi focare ca şi (E), dar având semiaxa mare de lungime $\dfrac{R_2 - R_1}{2}$.

Hiperbola

Teorema 2. *Fie $C_1(O_1, R_1)$ şi $C_2(O_2, R_2)$ două cercuri exterioare, cu $R_1 > R_2$. Atunci, locul geometric al centrelor cercurilor tangente la (C_1) şi (C_2) şi care sunt situate în exteriorul lor sau le includ în interiorul lor este hipebola (H) cu focarele O_1 şi O_2 şi cu semiaxa reală de lungime $\dfrac{R_1 - R_2}{2}$.*

Demonstraţie. Fie $\Gamma(O_\Gamma, R_\Gamma)$ un cerc tangent cercurilor date. Putem avea următoarele situaţii:

a) $d(O_\Gamma, O_1) = R_\Gamma + R_1$ şi $d(O_\Gamma, O_2) = R_\Gamma + R_2$, dacă Γ este exterior cercurilor C_1 şi C_2. În acest caz, avem:

$$d(O_\Gamma, O_1) - d(O_\Gamma, O_2) = R_1 - R_2.$$

b) $R_\Gamma = d(O_\Gamma, O_1) + R_1$ şi $R_\Gamma = d(O_\Gamma, O_2) + R_2$, dacă Γ cuprinde in interiorul său cercurile (C_1) şi (C_2). În acest caz, avem:

$$d(O_\Gamma, O_2) - d(O_\Gamma, O_1) = R_1 - R_2.$$

În ambele cazuri, avem relaţia

$$|d(O_\Gamma, O_1) - d(O_\Gamma, O_2)| = R_1 - R_2$$

şi rezultă că punctele O_Γ aparţin hiperbolei (H) din enunţ.

Pentru a demonstra reciproca, utilizăm notaţiile din Fig.2.

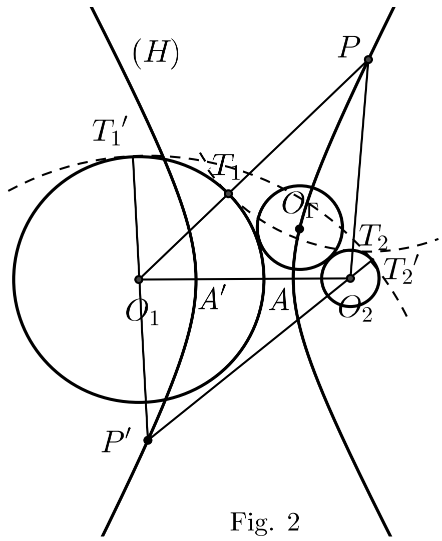

Fig. 2

Fie un punct P al hipebolei (H). Presupunem mai întâi că acesta aparţine componentei dinspre focarul O_2. Fie T_1 punctul de intersecţie cel mai apropiat de P a semidreptei $[PO_1$ cu cercul (C_1) şi similar T_2. Atunci, $d(P, T_1) = d(P, O_1) - R_1$ şi $d(P, T_2) = d(P, O_2) - R_2$. Deoarece $d(P, O_1) = d(P, O_2) + R_1 - R_2$, obţinem că $d(P, T_1) = d(P, T_2)$. Dacă $P' := P$ aparţine componentei dinspre focarul O_1, atunci considerăm punctele T_1' şi T_2' de intersecţie mai îndepărtate de P'. În acest caz, avem: $d(P', T_1') = d(P', O_1) + R_1$ şi $d(P', T_2') = d(P', O_2) + R_2 = d(P', O_1) + (R_1 - R_2) + R_2 = d(P', T_1')$. În fiecare dintre cazuri, există un cerc cu centrul în P, respectiv P', tangent cercurilor (C_1) şi (C_2). Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observaţie. În condiţiile teoremei pentru cercurile date, dacă cercul mobil (Γ) ar fi tangent exterior unuia dintre cercurile (C_1) şi (C_2), iar celălalt cerc ar fi tangent interior lui (Γ), atunci am avea că $|d(O_\Gamma, O_1) - d(O_\Gamma, O_2)| = R_1 + R_2$, iar locul centrului O_Γ ar fi hiperbola cu aceleaşi focare ca şi (H), dar având semiaxa reală de lungime $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$.

Parabola

Teorema 3. *Fie în planul euclidian un cerc $C(O, R)$ şi o dreaptă (d) exterioară cercului, cu $d(O,(d)) = a$. Locul geometric al centrelor cercurilor tangente dreptei (d) şi cercului (C) este parabola (P) având focarul în O, directoarea paralelă cu drepata (d) şi parametrul $p = a + R$.*

Demonstraţie. Fie $\Gamma(O_\Gamma, R_\Gamma)$ un cerc tangent cercului şi dreptei. Avem atunci $d(O_\Gamma,(d)) = R_\Gamma$ şi $d(O_\Gamma, O) = R + R_\Gamma$. Prin urmare, $d(O_\Gamma, O) = R + d(O_\Gamma,(d))$. Considerăm în semiplanul mărginit de (d) ce nu conţine punctul O, drepata $(\Delta)||(d)$, cu distanţa dintre cele două drepte egală cu R. Atunci, avem că $d(O_\Gamma, O) = d(O_\Gamma,(\Delta))$. Prin urmare, punctele O_Γ aparţin parabolei (P) din enunţ. Vârful parabolei este centrul cercului tangent cu cea mai mică rază.

Reciproc, fie M un punct al parabolei (P) (Fig.3).

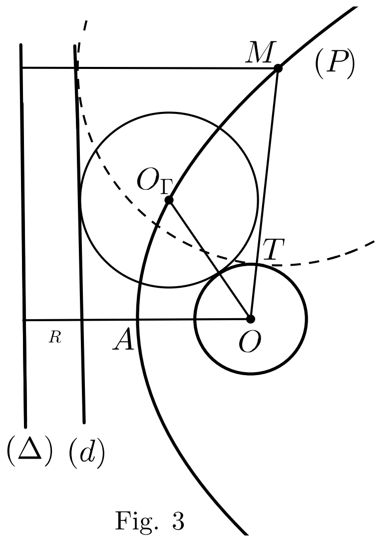

Fig. 3

Semidreapta $[OM$ intersectează cercul (C) în punctul T. Atunci $d(M,T) = d(M,O) - R = d(M,(d')) - R = d(M,(d))$. Prin urmare, $C(M, d(M,T))$ este un cerc tangent cercului (C) şi dreptei (d), deci M este un punct al locului geometric. Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observaţii. 1. Este uşor de văzut că, dându-se o conică nedegenerată, se pot alege două cercuri sau un cerc şi o dreaptă ca în enunţurile teoremelor, încât conica să coincidă cu locul geometric asociat perechii respective (care evident că nu este unică).

Deci, în cazul unei elipse arbitare se pot lua două cercuri cu centrele în focare, interior unul celuilalt, de raze $R_1 = a - x$ în F' şi $R_2 = a + x$ în F, cu $x > c$ etc.

2. Punctele O_Γ pot fi construite cu rigla şi compasul sau chiar numai cu compasul, pentru R_Γ prescris. Astfel că, avem şi această metodă simplă de a construi puncte ale unei conice.

3. Rezultate analoage, dar cu demonstraţii (analitice) mult mai laborioase, au loc pentru cuadrice, în legătură cu centrele sferelor tangente la trei sfere date sau două sfere şi un plan sau două plane şi o sferă, locurile geometrice respective fiind cuadrice.

Comentarii. Natura conicei rezultată ca loc geometric depinde atât de poziţia relativă a cercurilor (C_1) şi (C_2), cât şi de poziţiile impuse cercului (Γ) faţă de acestea. Mai sus au fost considerate câteva cazuri posibile pentru poziţiile acestor trei cercuri. Cititorul interesat poate analiza şi alte cazuri. În Fig.4 şi Fig. 5 sunt prezente alte situaţii, care pot fi desprinse cu uşurinţă de pe aceste figuri.

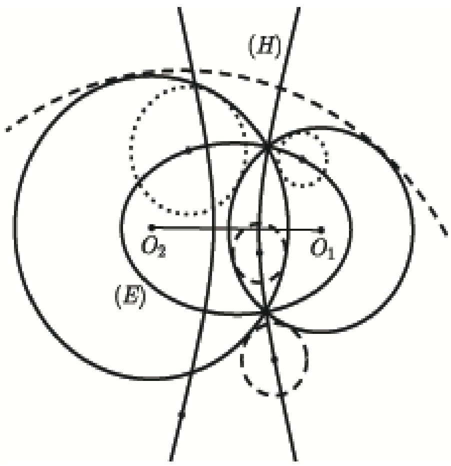

Fig. 4

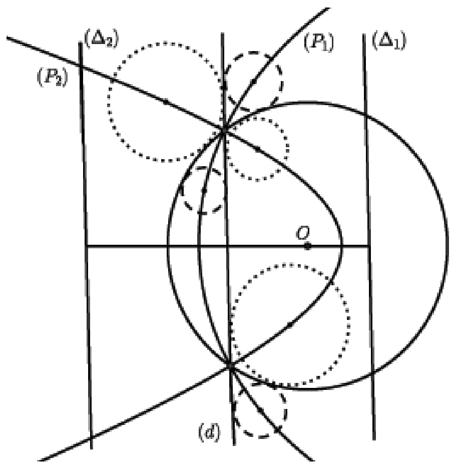

Fig. 5

În Fig. 4, cercurile (C_1) şi (C_2) sunt secante şi se obţine o elipsă (E), dacă cercul (Γ) este în situaţia sugerată de cercurile punctate sau, dacă acesta este în situaţia cercurilor figurate cu linii întrerupte, o hiperbolă (H). În Fig. 5, dreapta (d) este secantă cercului (C) şi se obţin două parabole (P_1) şi (P_2); aici s-au luat directoarele (Δ_1), (Δ_2) astfel încât $d((d), (\Delta_1)) = d((d), (\Delta_2)) = R$.

Bibliografie

1. **Gh. Buicliu** – *Probleme de construcţii geometrice cu rigla si compasul*, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1957.