Noi proprietăţi relativ la cercurile tritangente ale unui triunghi

Marian CUCOANEŞ[1]***, Leonard GIUGIUC***[2]***, Petru BRAICA***[3]

Abstract. In this paper, some properties of collinearity, concurrence, etc. related to a geometric configuration consisting of a triangle, its incircle and the three exincircles are presented.

Keywords: incenter, orthocenter, area, excircles.

MSC 2010: 51M04.

Vom avea în vedere configuraţia formată dintr-un triunghi ABC oarecare, cercul înscris lui de centru I şi cercurile exînscrise de centre I_a, I_b, I_c.

Notăm cu M, N, P punctele de tangenţă a cercului înscris cu laturile $(BC), (CA)$ şi respectiv (AB). Relativ la punctul I, considerăm ortocentrele H_1, H_2, H_3 ale triunghiurilor IBC, ICA şi respectiv IAB. Următoarele două teoreme indică proprietăţi ale triunghiului $H_1H_2H_3$.

Teorema 1 (*M. Cucoaneş, P. Braica*)**.** *Sunt adevărate următoarele afirmaţii*: a) *punctele* H_2, M, H_3 *sunt coliniare;* b) H_3, N, H_1 *sunt coliniare;* c) H_1, P, H_2 *sunt coliniare*.

Demonstraţie. Arătăm numai punctul a), afirmaţiile b) şi c) se dovedesc similar.

Fie $H_2H_3 \cap BC = \{M_1\}$. Avem $H_3B \| H_2C$, deoarece H_3B şi H_2C sunt perpendiculare pe AI (fig. 1). Ca urmare, $\triangle M_1H_3B \sim \triangle M_1H_2C$ şi rezultă că $\dfrac{M_1B}{M_1C} = \dfrac{BH_3}{CH_2}$. Dar în $\triangle PBH_3$ dreptunghic în P avem că

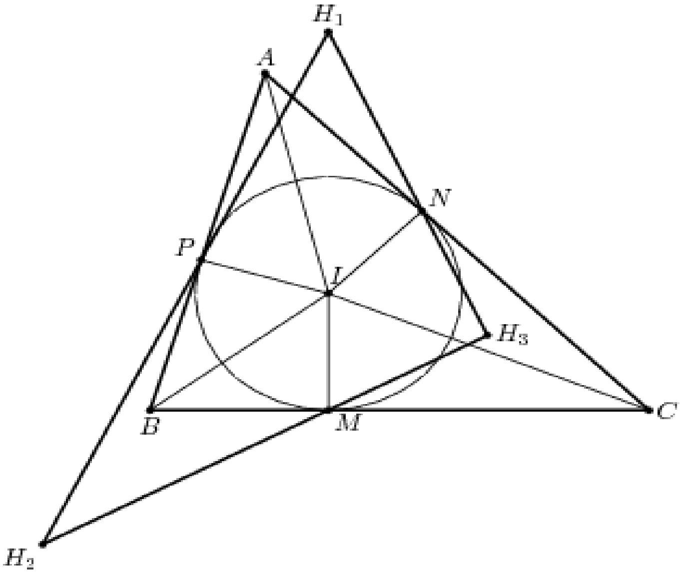

Fig. 1

$(\widehat{PH_3B}) = \dfrac{A}{2}$ şi, deci, $BH_3 = \dfrac{PB}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{p-b}{\sin\frac{A}{2}}$; analog, $CH_2 = \dfrac{p-c}{\sin\frac{A}{2}}$. Ca urmare,

[1]Profesor, Liceul ,,Eremia Grigorescu", Mărăşeşti; *gabrielacucoanes@yahoo.com*
[2]Profesor, Colegiul Naţional ,,Traian", Drobeta-Tr. Severin; *leonardgiugiuc@yahoo.com*
[3]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Grigore Moisil", Satu Mare; *pbraica@yahoo.com*

$\dfrac{M_1B}{M_1C} = \dfrac{p-b}{p-c}$, adică $\dfrac{M_1B}{M_1C} = \dfrac{MB}{MC}$. Punctul M_1 coincide cu M, deci H_2, M, H_3 sunt coliniare.

Teorema 2 (*M. Cucoaneş*)**.** *Triunghiul $H_1H_2H_3$ este echivalent cu $\triangle ABC$.*

Demonstraţie (*L. Giugiuc*)**.** Mai întâi calculăm H_1I, H_2I, H_3I. Triunghiul H_1BC are ca ortocentru punctul I, iar măsurile unghiurilor acestuia sunt $\dfrac{B+C}{2}$, $\dfrac{A+B}{2}$ şi respectiv $\dfrac{A+C}{2}$. Din teorema sinusurilor aplicată în acest triunghi rezultă că $2R_1 = \dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}$ şi $H_1I = 2R_1 \sin\frac{A}{2}$ (conform formulei cunoscute: $AH = 2R|\cos A|$), unde R_1 este raza cercului circumscris triunghiului H_1BC. Combinând aceste relaţii, obţinem că $H_1I = a\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ şi, deci, avem:

$$H_1I = a\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad H_2I = b\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \;\; H_3I = c\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \tag{1}$$

În $\triangle IH_1H_2$ avem că $m(\widehat{H_1IH_2}) = m(\widehat{MIN}) = \pi - C$. Notând $S = S[ABC]$ şi ţinând seama de (1), obţinem:

$$2S[H_1IH_2] = H_1I \cdot H_2I \sin(\pi - C) = ab\sin C \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 2S\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

Acesta şi rezultatele analoage conduc la

$$2S[H_1H_2H_3] = 2S \cdot \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 2S,$$

deci triunghiul $H_1H_2H_3$ este echivalent cu $\triangle ABC$.

Observaţii. 1) Triunghiul $H_1H_2H_3$ asociat unui triunghi ABC echilateral coincide cu acesta (H_1 coincide cu A etc.).

2) Dacă $\triangle H_1H_2H_3 \sim \triangle ABC$, conform Teoremei 2 aceste triunghiuri sunt congruente şi suntem conduşi la sistemul:

$$H_2H_3 = a, \;\; H_3H_1 = b, \;\; H_1H_2 = c.$$

Aflăm H_2H_3 cu teorema cosinusului aplicată la $\triangle IH_2H_3$:

$$H_2H_3^2 = IH_2^2 + IH_3^2 - 2IH_2 \cdot IH_3 \cos(\pi - A) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$
$$H_2H_3^2 = b^2\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + c^2\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + 2bc\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cos A$$

şi, trecând la laturi, obţinem în cele din urmă

$$H_2H_3^2 = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}[(b-c)^2 + a(p-a)].$$

Punem această expresie şi analoagele sale în sistemul de mai sus şi obţinem un sistem algebric în a, b, c care are soluţia $a = b = c$ (evităm calculele comune şi neplăcute!). Aşadar, faptul că $\triangle H_1H_2H_3 \sim \triangle ABC$ impune triunghiului ABC să fie echilateral.

Fie D, E, F punctele de tangenţă cu BC, CA şi respectiv AB ale cercului exînscris triunghiului ABC de centru I_a (fig. 2). Notăm cu H_1^*, H_2^* şi H_3^* ortocentrele triunghiurilor BCI_a, CAI_a şi respectiv ABI_a.

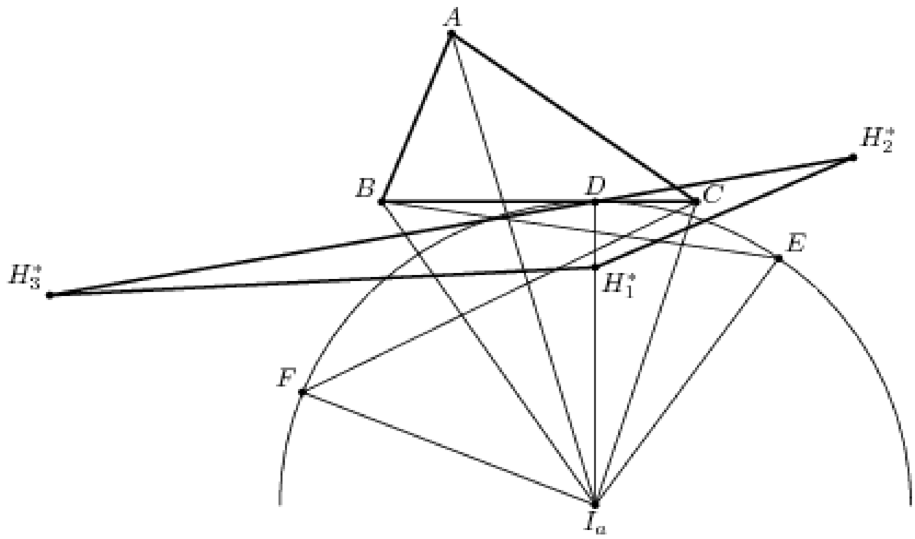

Fig. 2

Teorema 3 (*P. Braica, M. Cucoaneş*). *Sunt adevărate următoarele proprietăţi:*
a) *punctele H_2^*, D şi H_3^* sunt coliniare;*
b) *triunghiurile ABC şi $H_1^*H_2^*H_3^*$ sunt echivalente.*

Demonstraţie. a) Fie $H_2^*H_3^* \cap BC = \{D_1\}$. Avem $BH_3^* \| CH_2^*$, deoarece BH_3^* şi CH_2^* sunt perpendiculare pe AI_a; ca urmare $\dfrac{BD_1}{CD_1} = \dfrac{BH_3^*}{CH_2^*}$. Cum în $\triangle FBH_3^*$ dreptunghic în F avem $m(\widehat{FH_3^*B}) = \dfrac{A}{2}$, obţinem: $BH_3^* = \dfrac{BF}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{p-c}{\sin\frac{A}{2}}$. Analog, considerând $\triangle ECH_2^*$, avem: $CH_2^* = \dfrac{p-b}{\sin\frac{A}{2}}$. Rezultă că $\dfrac{BD_1}{CD_1} = \dfrac{p-c}{p-b}$. Întrucât avem şi $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{p-c}{p-b}$, deducem că punctele D şi D_1 coincid. În consecinţă, punctele H_2^*, D, H_3^* sunt coliniare.

b) Se constată că $I_a \notin \mathrm{Int}(\triangle H_1^* H_2^* H_3^*)$, deci avem:

$$\begin{aligned} 2S[H_1^*H_2^*H_3^*] &= 2S[I_aH_2^*H_3^*] - 2S[I_aH_1^*H_2^*] - 2S[I_aH_1^*H_3^*] = \\ &= I_aH_2^* \cdot I_aH_3^* \sin(\pi - A) - I_aH_1^* \cdot I_aH_2^* \sin(\pi - C) \\ &- I_aH_1^* \cdot I_aH_3^* \sin(\pi - B). \end{aligned}$$

Observăm că în $\triangle H_3AI_a$ punctul B este ortocentru, iar $[AB]$ este un segment eulerian; avem $c = AB = 2R_3 \cos(\widehat{I_aAH_3}) = 2R_3 \cos \dfrac{A+B}{2}$. Cu teorema sinusurilor aplicată în acelaşi triunghi, obţinem: $I_aH_3^* = 2R_3 \sin(\widehat{I_aAH_3^*}) = 2R_3 \sin \dfrac{A+B}{2}$. Combinând, găsim că $I_aH_3^* = c \operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}$. Le fel se obţin relaţiile: $I_aH_2^* = b \operatorname{tg} \dfrac{C+A}{2}$ şi $I_aH_1^* = a \operatorname{tg} \dfrac{A}{2}$.

Revenind la aria $\triangle H_1^*H_2^*H_3^*$, avem:

$$\begin{aligned} 2S[H_1^*H_2^*H_3^*] &= bc \operatorname{tg}\frac{C+A}{2} \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \sin A - ab \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{C+A}{2} \sin C - \\ &- ac \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \sin B = 2S \cdot E(A,B,C), \end{aligned}$$

unde $S = S[A,B,C]$ şi

$$E(A,B,C) = \operatorname{tg}\frac{C+A}{2} \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{C+A}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 1$$

(calcul de rutină!). Aşadar, $S[H_1^*H_2^*H_3^*] = S$, ceea ce trebuia arătat.

Să notăm cu H_a, H_b, H_c ortocentrele triunghiurilor I_aBC, I_bCA şi I_cAB (fig. 3).

Teorema 4 (*L. Giugiuc, P. Braica*)**.** *Triunghiul $H_aH_bH_c$ are proprietăţile următoare:*

a) *$\triangle H_aH_bH_c$ este congruent cu $\triangle ABC$;*

b) *perpendicularele din I_a pe H_bH_c, din I_b pe H_cH_a şi din I_c pe H_aH_b sunt concurente.*

Demonstraţie. a) (*L. Giugiuc*) Să arătăm că patrulaterul ACH_aH_c este paralelogram. Mai întâi, AH_c şi CH_a sunt paralele fiind perpendiculare pe I_aI_c.

Apoi, notând cu D proiecţia punctului H_a pe BC, în $\triangle H_aCD$ avem: $m(\widehat{H_aCD}) = m(\widehat{H_aCB}) = \dfrac{B}{2}$ şi $CH_a = \dfrac{CD}{\cos(\widehat{H_aCB})} = \dfrac{p-b}{\cos\frac{B}{2}}$. Similar, găsim că $AH_c = \dfrac{p-b}{\cos\frac{B}{2}}$ şi deducem că $CH_a = AH_c$.

Aşadar, putem afirma că $AC \| H_aH_c$ şi $AC = H_aH_c$. Similar, sunt paralele şi egale BC şi H_bH_c, precum şi AB şi H_aH_b. Triunghiurile ABC şi $H_aH_bH_c$ sunt congruente şi au laturile paralele două câte două.

b) (*P. Braica*) Afirmaţia este echivalentă cu concurenţa perpendicularelor din I_a, I_b, I_c pe laturile BC, CA şi respectiv AB ale triunghiului ABC, acest fapt fiind un rezultat clasic ($\triangle ABC$ şi $\triangle I_aI_bI_c$ sunt ortogologice).

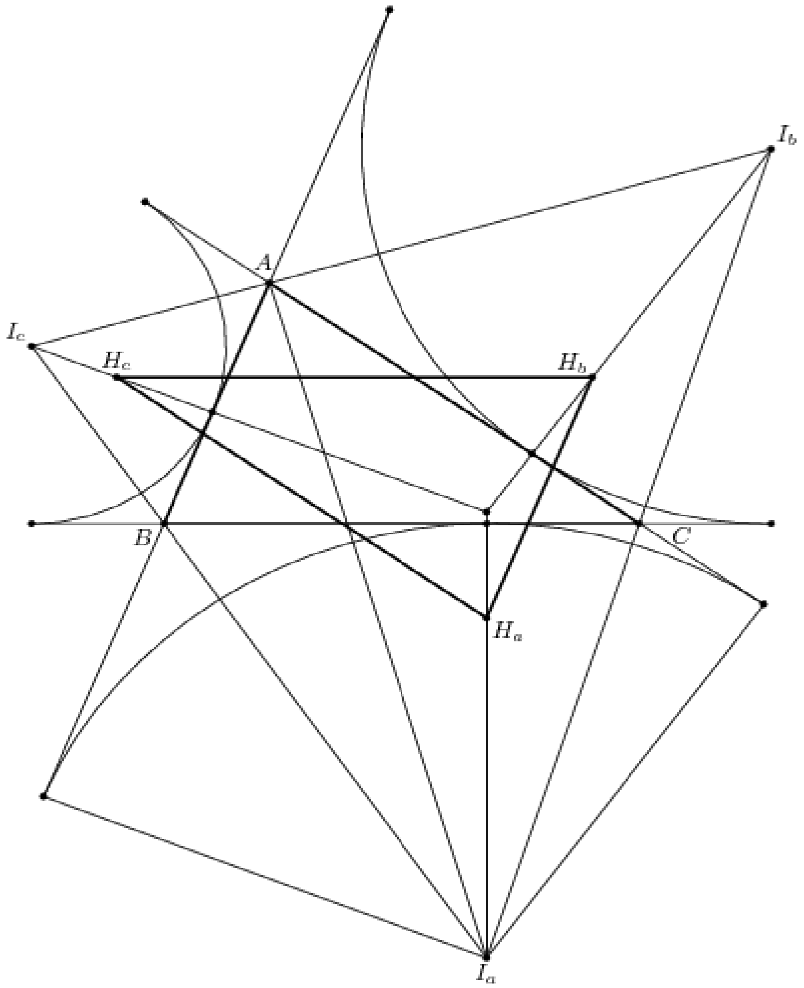

Fig. 3

Observaţie. Punctul de concurenţă pus în evidenţă în teorema precedentă este centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ şi ortocentrul triunghiului $H_aH_bH_c$, dar şi punctul izogonal conjugat ortocentrului triunghiului $I_aI_bI_c$.

Bibliografie

1. D. Andrica, C. Varga, D. Văcăreţu – *Teme şi probleme alese de geometrie*, Editura Plus, Bucureşti, 2002.

2. T. Lalescu – *Geometria triunghiului*, Editura Apollo, 1990.

3. L. Nicolescu, V. Boskoff – *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.