O metodă de rafinare a unor inegalităţi geometrice

Temistocle BÎRSAN[1]***, Marius DRĂGAN***[2]***,***
Neculai STANCIU[3]

Abstract. This paper presents a method to obtain some refined geometric inequalities in a triangle, based on Blundon's inequality.
Keywords: Blundon′s inequality, best constant, Gerretsen′s inequality, Bilčev′s inequality.
MSC 2010: 51M16.

Metoda pe care o propunem are la bază *inegalitatea lui Blundon* [**1**]. Aceasta, numită şi *inegalitatea fundamentală a triunghiului*, este formulată în

Teorema 1. *În orice triunghi ABC avem:*

$$(1)\quad 2R^2+10Rr-r^2-2\sqrt{R\,(R-2r)^3}\le p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R\,(R-2r)^3},$$

unde R, r, p au semnificaţiile uzuale.

În prima inegalitate egalitate dacă şi numai dacă ΔABC este echilateral sau este isoscel cu unghiul din vârf mai mare ca $\frac{\pi}{3}$, iar în a doua avem egalitate dacă şi numai dacă ΔABC este echilateral sau este isoscel cu unghiul din vârf mai mic ca $\frac{\pi}{3}$.

În cele ce urmeză, va fi util următorul rezultat [**2**], [**4**]:

Teorema 2. *Fie ABC un triunghi şi $C(O,R), C(I,r)$ cercurile sale circumscris, respectiv înscris*

a) Există un triunghi isoscel T_1 înscris în $C(O,R)$ şi circumscris lui $C(I,r)$, cu unghiul din vârf mai mare ca $\frac{\pi}{3}$ şi astfel încât $p_1\le p$, unde p_1 este semiperimetrul triughiului T_1.

b) Există un triunghi isoscel T_2 înscris în $C(O,R)$ şi circumscris lui $C(I,r)$, cu unghiul din vârf mai mic ca $\frac{\pi}{3}$ şi astfel încât $p_2\ge p$, unde p_2 este semiperimetrul triughiului T_2.

Metoda pe care o propunem se referă la inegalităţi de forma

$$(2)\qquad p^2\ge f_1(R,r,k),$$

$$(3)\qquad p^2\le f_2(R,r,k),$$

unde funcţiile f_1, f_2 sunt omogene de gradul doi în R, r şi liniare în parametrul k, real şi pozitiv. Pentru determinarea valorilor lui k pentru care are loc inegalitatea

[1]Profesor dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.com*
[2]Profesor, Colegiul Tehnic ,,Mircea cel Bătrân", Bucureşti
[3]Profesor, Şcoala Gimnazială ,,George Emil Palade", Buzău; *stanciuneculai@yahoo.com*

(2), sau inegalitatea (3), cât şi a celei mai bune dintre aceste valori, se procedează astfel:

1. se consideră inegalităţile

$$2R^2+10Rr-r^2-2\sqrt{R\,(R-2r)^3}\geq f_1(R,r,k), \tag{4}$$

$$2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R\,(R-2r)^3}\leq f_2(R,r,k), \tag{5}$$

care sunt echivalente cu (2), respectiv (3) în sensul că au loc pentru aceleaşi valori ale parametrului k (Teorema 3);

2. se pune $x=\dfrac{R}{r}, x\in[2,\infty)$, în ecuaţiile precedente, obţinându-se formele:

$$2x^2+10x-1-2\sqrt{x\,(x-2)^3}\geq f_1(x,1,k), \tag{6}$$

$$2x^2+10x-1+2\sqrt{x\,(x-2)^3}\leq f_2(x,1,k), \tag{7}$$

care sunt ecuaţii algebrice în x pe intervalul $[2,\infty)$ şi liniare în $k>0$;

3. se rezolvă în k şi se află mulţimile de valori ale lui k pentru care (6), respectiv (7) au loc oricare ar fi $x\in[2,\infty)$ (echivalent cu faptul că (2), respectiv (3) au loc pentru orice triunghi);

4. cel mai bun k pentru care inegalităţile (2) sau (3) au loc se găseşte ca supremul mulţimilor respective de valori determinate la punctul precedent.

Justificarea trecerii de la inegalitatea (2) la inegalitatea (4) şi de la (3) la (5), trecere realizată având în vedere inegalitatea lui Blundon, este dată de rezultatul:

Teorema 3. *Inegalităţile* (2) *şi* (4) *au loc pentru aceleaşi valori ale parametrului* k. *Aceeaşi afirmaţie este valabilă şi în privinţa inegalităţilor* (3) *şi* (5).

Demonstraţie. Vom dovedi numai prima parte.

Fie k o valoare pentru care (4) are loc. Combinând cu prima inegalitate din (1), rezultă că $p^2\geq f_1(R,r,k)$, adică (2) are loc pentru valoarea k considerată.

Invers, fie k o valoare pentru care (2) este adevărată. Să presupunem, prin absurd, că (4) nu are loc. Deci există un triunghi T pentru care avem

$$2R^2+10Rr-r^2-2\sqrt{R\,(R-2r)^3}<f_1(R,r,k). \tag{$*$}$$

Conform Teoremei 2, punctul a), pentru triunghiul T există un triunghi isoscel T_1 cu unghiul din vârf mai mare ca $\dfrac{\pi}{3}$ şi având $R_1=R, r_1=r$, $p_1\leq p$. Pentru T_1, ca pentru orice triunghi, avem:

$$p_1^2\geq f_1(R_1,r_1,k). \tag{$**$}$$

Pe de altă parte, ţinând seama şi de Teorema 1, relativ la T_1 putem scrie:

$$\begin{aligned}p_1^2&=2R_1^2+10R_1r_1-r_1^2-2\sqrt{R_1\,(R_1-2r_1)^3}=2R^2+10Rr-r^2\\&-2\sqrt{R\,(R-2r)^3}\overset{(*)}{<}f_1(R,r,k)=f_1(R_1,r_1,k),\end{aligned}$$

adică

$$(***) \qquad p_1^2 < f_1(R_1, r_1, k).$$

Relaţiile (**) şi (* * *) indică o contradicţie. În concluzie, (4) are loc pentru k luat.

Consecinţă. *Inegalităţile* (2) *şi* (4) *au aceeaşi cea mai bună constantă pentru care sunt adevărate. Acest rezultat este valabil şi în privinţa inegalităţilor* (3) *şi* (5).

Aplicaţii.

Vom utiliza metoda expusă mai sus în scopul rafinării unor inegalităţi cunoscute.

I. *Rafinarea inegalităţii lui Gerretsen*, adică a inegalităţilor

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \tag{8}$$

([**2**], p. 50). Ne propunem să găsim cele mai bune constante pozitive k_1 şi k_2 astfel încât inegalităţile

$$16Rr - 5r^2 + k_1\left(\frac{r}{R}\right)^2 (R-2r)^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - k_2\left(\frac{r}{R}\right)^2 (R-2r)^2 \tag{9}$$

să fie adevărate în orice triunghi.

Mai întâi, să ne ocupăm de prima inegalitate din (9), adică

$$p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + k_1\left(\frac{r}{R}\right)^2 (R-2r)^2, \tag{10}$$

ceea ce este este echivalent cu a ne ocupa cu inegalitatea

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3} \geq 16Rr - 5r^2 + k_1\left(\frac{r}{R}\right)^2 (R-2r)^2 \tag{11}$$

sau, introducând $x = \dfrac{R}{r}, x \in [2, \infty)$, cu inegalitatea

$$2x^2 + 10x - 1 - 2\sqrt{x(x-2)^3} \leq 16x - 5 + k_1\frac{(x-2)^2}{x^2}.$$

Selectând k_1, obţinem:

$$k_1 \leq \frac{x^2}{(x-2)^2}\left[2(x-2)(x-1) - 2\sqrt{x(x-2)^3}\right], \tag{12}$$

de unde, pentru $x \to \infty$, vom avea $k_1 \leq 1$.

În acest moment, pentru a arăta că (10) în care luăm $k_1 = 1$ este cea mai bună inegalitate de această formă, avem două posibilităţi: fie arătăm că infimul funcţiei din partea dreaptă a inegalităţii (12) este 1, fie verificăm că pentru $k_1 = 1$ inegalitatea (11) este adevărată. Evident, este mai simplă a doua cale.

Să arătăm, deci, că avem

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R\left(R-2r\right)^3} \geq 16Rr - 5r^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(R-2r\right)^2$$

sau că

$$2x^2 + 10x - 1 - 2\sqrt{x\left(x-2\right)^3} \leq 16x - 5 + \frac{\left(x-2\right)^2}{x^2},\ x \in [2, \infty).$$

Aceasta se scrie succesiv în formele:

$$\begin{aligned} 2\left(x-1\right) - 2\sqrt{x\left(x-2\right)} &\geq \frac{x-2}{x^2} \Longleftrightarrow 2x^2\left(x-1\right) - \left(x-2\right) \geq 2x^2\sqrt{x\left(x-2\right)} \Longleftrightarrow \\ 12x^3 - 7x^2 - 4x + 4 &\geq 0 \Longleftrightarrow 7x^2\left(x-1\right) + x^3 + 4\left(x^3-1\right) + 4 \geq 0, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat pentru $x \in [2, \infty)$.

Să ne ocupăm acum de inegalitatea

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - k_2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(R-2r\right)^2, \tag{13}$$

procedând la fel. Trecem la inegalitatea

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R\left(R-2r\right)^3} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - k_2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(R-2r\right)^2 \tag{14}$$

şi apoi, prin $x = \dfrac{R}{r}$, la

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x - 1 + 2\sqrt{x\left(x-2\right)^3} &\leq 4x^2 + 4x + 3 - k_2\frac{\left(x-2\right)^2}{x^2} \Longleftrightarrow \\ k_2 &\leq \frac{2x^2}{x-2}\left[\left(x-1\right) - \sqrt{x\left(x-2\right)}\right], \end{aligned}$$

de unde, pentru $x \to \infty$, obţinem $k_2 \leq 1$. Valoarea $k_1 = 1$ va fi cea mai bună, dacă arătăm că (14), în care luăm $k_2 = 1$, este adevărată. Aceasta revine la

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{2x^2}{x-2}\left[\left(x-1\right) - \sqrt{x\left(x-2\right)}\right] &\Longleftrightarrow 2x^2\sqrt{x\left(x-2\right)} \leq 2x^3 - 2x^2 - x + 2 \Longleftrightarrow \\ 12x^3 - 7x^2 - 4x + 2 \geq 0 &\Longleftrightarrow 7x^2\left(x-1\right) + x^3 + 4x\left(x^2-1\right) + 2 \geq 0, \end{aligned}$$

adevărat pentru $x \in [2, \infty)$.

În concluzie, am obţinut următoarea rafinare a inegalităţilor lui Gerretsen:

$$16Rr - 5r^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(R-2r\right)^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(R-2r\right)^2. \tag{15}$$

Observaţie. În [**2**], p.166, 3.5, sunt indicate inegalităţile

$$\frac{4r\left(12R^2 - 11Rr + r^2\right)}{3R-2r} \leq p^2 \leq \frac{R\left(4R+r\right)^2}{2\left(2R-r\right)}, \tag{16}$$

datorate lui *S.J. Bilčev*, care rafinează inegalităţile lui Gerretsen.

Comparând inegalităţile (15) şi (16), constatăm următoarele: 1) prima inegalitate din (16) este mai tare ca prima inegalitate din (15); 2) dacă $2r \leq R \leq \left(5+\sqrt{21}\right) r$, atunci a doua inegalitate din (16) este mai tare decât corespunzătoarea ei din (15); 3) dacă $R \geq \left(5+\sqrt{21}\right) r$, atunci a doua inegalitate din (15) este mai tare decât corespunzătoarea ei din (16).

II. *O rafinare a inegalităţii*

$$p^2 \leq \frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)}, \tag{17}$$

adică a celei de-a doua inegalităţi din (16).

Să găsim cea mai bună constantă pozitivă k astfel încât inegalitatea

$$p^2 \leq \frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)} - k\frac{(R-2r)\,r^2}{R} \tag{18}$$

să fie adevărată în orice triunghi.

Această problemă este echivalentă cu a găsi cea mai bună constantă pozitivă k pentru valabilitatea inegalităţii

$$2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R\,(R-2r)^3} \leq \frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)} - k\frac{(R-2r)\,r^2}{R}. \tag{19}$$

Punând $x=\dfrac{R}{r}$, obţinem:

$$\begin{aligned}
&2x^2+10x-1+2\sqrt{x\,(x-2)^3} \leq \frac{x\,(4x+1)^2}{2\,(2x-1)} - k\frac{x-2}{x} \iff \\
&\qquad k \leq \frac{x}{x-2}\left[\frac{x\,(4x+1)^2}{2\,(2x-1)} - \left(2x^2+10x-1\right) - 2\sqrt{x\,(x-2)^3}\right] \iff \\
&\qquad k \leq x\left[\frac{8x^2-12x+1}{2\,(2x-1)} - 2\sqrt{x\,(x-2)^3}\right] \iff \\
&\qquad k \leq \frac{x}{2\,(2x-1)} + 2x\left[\frac{2x^2-3x}{2x-1} - \sqrt{x\,(x-2)}\right]
\end{aligned}$$

şi, prin trecere la limită pentru $x \to \infty$, obţinem $k \leq \frac{1}{4}$.

Punem $k \leq \frac{1}{4}$ în (18) şi obţinem:

$$p^2 \leq \frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)} - \frac{(R-2r)\,r^2}{4R}. \tag{20}$$

Să demonstrăm că (20) este adevărată, pentru a arăta că $\dfrac{1}{4}$ este cea mai bună valoare a lui k pentru care este valabilă (18). Echivalent, să arătăm că are loc

$$2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R\,(R-2r)^3} \leq \frac{R\,(4R+r)^2}{2\,(2R-r)} - \frac{(R-2r)\,r^2}{4R},$$

obţinută luând $k = \dfrac{1}{4}$ în (19). Această inegalitate, scrisă în x, ia succesiv formele:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x - 1 + 2\sqrt{x\left(x-2\right)^3} &\le \frac{x\left(4x+1\right)^2}{2\left(2x-1\right)} - \frac{x-2}{4x} \Longleftrightarrow \\ 2\sqrt{x\left(x-2\right)} &\le \frac{8x^2-12x+1}{2\left(2x-1\right)} - \frac{1}{4x} \Longleftrightarrow \\ 8x\left(2x-1\right)\sqrt{x\left(x-2\right)} &\le 16x^3 - 24x^2 + 1 \Longleftrightarrow 160x^3 - 48x^2 + 1 \ge 0, \end{aligned}$$

ultima inegalitate fiind evident adevărată pentru $x \ge 2$.

Aşadar, (20) este cea mai bună inegalitate de forma (18) şi ea reprezintă o rafinare a inegalităţii (17).

În încheiere, propunem să se rezolve cu aceeaşi metodă următoarele probleme:

III Arătaţi că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$p \le 2R + \left(3\sqrt{3}-4\right)r - \left(3\sqrt{3}-5\right)\frac{r}{R}\left(R-2r\right), \tag{21}$$

unde $k = 3\sqrt{3} - 5$ este cea mai bună constantă pozitivă pentru inegalitatea de această formă. Acest rezultat a fost stabilit pe o altă cale în [**4**], formula (16).

IV Arătaţi că inegalitatea

$$p^2 \le \frac{4R^3 - 2Rr^2 - r^3}{R-r} \tag{22}$$

este cea mai bună printre inegalităţile de forma

$$p^2 \le \frac{4R^3 - 2Rr^2 - r^3}{R-r} - k\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(R-2r\right)^2.$$

V Arătaţi că inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \le \frac{36\left(4R^4 + 3r^4\right)}{18R^2 - 5r^2} \tag{23}$$

este cea mai bună printre inegalităţile de forma

$$a^2 + b^2 + c^2 \le \frac{36\left(4R^4 + 3r^4\right)}{18R^2 - 5r^2} - k\left(\frac{r}{R}\right)\left(R-2r\right)^2.$$

Bibliografie

1. W.J. Blundon – *Inequalities associated with the triangle*, Can. Math. Bull. 8(1965), 615-626.

2. D.S. Mitrinović, J.E. Pečaric, V. Volenec – *Recent Advences in Geometric inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1989.

3. S. Rădulescu, M. Drăgan, I.V. Maftei – *Some Consequences of W.J. Blundon's inequality*, Romanian Mathematical Gazette 1(2011), 3-9.

4. S-H. Wu, Y-M Chu – *Geometric interpretation of Blundon's inequality and Ciamberlini's inequality*, J. of Ineq. Appl., 2014, 2014:381.