Gradul de comutativitate al grupurilor finite[1]

Marius TĂRNĂUCEANU[2]

Abstract. The commutativity degree of a group is one of the most important probabilistic aspects of finite group theory. In this survey we will present some fundamental results concerning this notion.

Keywords: commutativity degree, solvable groups, supersolvable groups, nilpotent groups.

MSC 2010: 20D60, 20F16, 20F18.

1. Introducere

Gradul de comutativitate al unui grup finit G se defineşte prin

$$d(G) = \frac{1}{|G|^2} \left|\{(x, y) \in G^2 \mid xy = yx\}\right|$$

şi măsoară probabilitatea ca două elemente alese aleatoriu din G să comute.

Principalele probleme abordate în studiul gradului de comutativitate sunt:

- Găsirea unor limite pentru $d(G)$.
- Determinarea grupurilor finite G pentru care $d(G) = (\leq, \geq)\, a$, unde $a \in (0, 1]$ este fixat.
- Caracterizarea unor clase importante de grupuri finite utilizând gradul de comutativitate.
- Calculul gradului de comutativitate.
- Generalizări ale gradului de comutativitate.

Câteva proprietăţi imediate ale gradului de comutativitate:

1. $0 < d(G) \leq 1$, oricare ar fi grupul finit G.
2. $d(G) = 1$ dacă şi numai dacă grupul G este abelian.
3. $\dfrac{1}{[G : H]^2}\, d(H) \leq d(G) \leq d(H)$, oricare ar fi grupul finit G şi $H \leq G$.
4. $d(G) \leq d(H)d(G/H)$, oricare ar fi grupul finit G şi $H \lhd G$.
5. Funcţia d este total multiplicativă, adică $d(G_1 \times G_2) = d(G_1)d(G_2)$ oricare ar fi G_1 şi G_2 grupuri finite.

[1]Lucrarea de tip *survey* este o parte a comunicării prezentate de autor la Conferinţa Naţională a SSMR, Iaşi, 24-26 octombrie 2014.

[2]Conf.dr., Facultatea de Matematică, Univ. ,,Al.I. Cuza", Iaşi; e-mail: *tarnauc@uaic.ro*

2. Limite pentru gradul de comutativitate

2.1 Limita $\frac{5}{8}$

Teorema 2.1.1. *Fie G un grup finit neabelian. Atunci $d(G) \leq \frac{5}{8}$ şi avem $d(G) = \frac{5}{8}$ dacă şi numai dacă $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Observaţie. Grupurile Q_8 şi D_8 satisfac proprietatea $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, deci au gradul de comutativitate $\frac{5}{8}$. Alte grupuri cu această proprietate sunt grupurile semidiedrale $SD_{2^n}=\langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{2^{n-2}+1}\rangle, n \geq 4$.

Teorema 2.1.2. 1. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un grup finit G de ordin $8n$ cu $d(G) = \frac{5}{8}$.*

2. *Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 7\}$ nu există un grup finit G de ordin $\equiv k \pmod 8$ cu $d(G) = \frac{5}{8}$.*

2.2 p-limite

p-limitele reprezintă limite ale lui $d(G)$ scrise în funcţie de cel mai mic divizor prim p al lui $|G/Z(G)|$.

Teorema 2.2.1. *Cu notaţiile anterioare, avem*

$$d(G) \leq \frac{p^2 + p - 1}{p^3}.$$

Dacă, în plus, $|G/Z(G)| = p^k$, atunci

$$d(G) \geq \frac{p^k + p^{k-1} - 1}{p^{2k-1}}.$$

Corolarul 2.2.2. *Fie p un număr prim. Dacă G este un grup neabelian de ordin p^3, atunci $d(G) = \frac{p^2 + p - 1}{p^3}$.*

Exemplu. *Grupul Heisenberg* peste inelul $\mathbb{Z}_3$ are gradul de comutativitate $\frac{11}{27}$.

2.3 l-limite şi lp-limite

l-limitele şi lp-limitele reprezintă limite ale lui $d(G)$ scrise în funcţie de $l = |G/Z(G)|$, respectiv în funcţie de $l = |G/Z(G)|$ şi de cel mai mic divizor prim p al lui l.

Teorema 2.3.1. *Cu notaţiile anterioare, avem*

$$\frac{lp + l - p}{l^2} \leq d(G) \leq \frac{l + p - 1}{lp}.$$

Corolarul 2.3.2. *Fie G un grup neabelian finit. Dacă $|G/Z(G)| = l$, atunci*

$$\frac{3l-2}{l^2} \leq d(G) \leq \frac{l+1}{2l}.$$

Exemplu. Fie $n \geq 3$. Atunci

$$\frac{3 \cdot n! - 2}{n!^2} \leq d(S_n) \leq \frac{n!+1}{2 \cdot n!}.$$

2.4 Limita superioară centralizator

Derivă din ecuaţia claselor şi reprezintă o limită superioară a lui $d(G)$ scrisă în funcţie de indicele unui centralizator de ordin maxim.

Teorema 2.4.1. *Fie G un grup finit neabelian. Atunci există $x \in G \backslash Z(G)$ astfel încât*

$$d(G) \leq \frac{3}{2[G : C_G(x)]}.$$

Dacă, în plus, $Z(G) = \{e\}$, atunci există $x \in G \backslash \{e\}$ astfel încât

$$d(G) \leq \frac{1}{[G : C_G(x)]}.$$

Corolarul 2.4.2. *Au loc inegalităţile: 1. $d(D_{2n}) \leq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \geq 3$ impar.* 2. $d(S_n) \leq \frac{2}{n(n-1)}$, *oricare ar fi $n \geq 4$.*

2.5 Limite provenite din ecuaţia gradelor

Teorema 2.5.1. *Fie G un grup finit. Atunci*

$$\frac{1}{|G'|} \leq d(G) \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{|G'|}\right).$$

Corolarul 2.5.2. *Nu există grupuri finite având gradul de comutativitate în intervalul $\left(\frac{5}{8}, 1\right)$.*

Generalizare. *Fie G un grup neabelian finit şi d gradul minim al unei reprezentări neliniare a lui G. Atunci*

$$d(G) \leq \frac{1}{d^2} + \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)\frac{1}{|G'|}.$$

În plus, avem egalitate dacă toate reprezentările neliniare ale lui G sunt de grad d.

2.6 Limite superioare în funcţie de lungimea derivată

Teorema 2.6.1. *Fie G un grup rezolubil finit de lungimea derivată $d \geq 4$. Atunci*

$$d(G) \leq \frac{4d-7}{2^{d+1}}.$$

Teorema 2.6.2. *Fie G un p-grup finit de lungime derivată $d \geq 2$. Atunci*

$$d(G) \leq \frac{p^d + p^{d-1} - 1}{p^{2d-1}}.$$

Exemplu. Fie G un p-grup finit de ordin p^n, unde $n > 2$. Atunci G are lungime derivată cel mult $d = [\frac{n}{2}]$, deci inegalitatea dată de Teorema 2.6.2 devine

$$d(G) \leq \frac{1}{p^{[\frac{n-2}{2}]}} + \frac{1}{p^{[\frac{n}{2}]}} - \frac{1}{p^{2[\frac{n}{2}]-1}}.$$

2.7 Limite inferioare adiţionale

Teorema 2.7.1. *Dacă G este un grup nilpotent finit de clasă de nilpotenţă n, atunci*

$$d(G) \geq \frac{n|G|^{\frac{1}{n}} - n + 1}{|G|}.$$

Corolarul 2.7.2. *Dacă G este un grup nilpotent finit, atunci $k(G) > log_2|G|$ şi astfel*

$$d(G) > \frac{log_2|G|}{|G|}.$$

Teorema 2.7.3. *Dacă G este un grup rezolubil finit de lungime derivată d, atunci*

$$d(G) \geq \frac{d+1}{|G|}.$$

Teorema 2.7.4. *Dacă G este un grup rezolubil finit de lungime derivată d, atunci* $k(G) \geq |G|^{\frac{1}{2^d-1}}$ şi astfel

$$d(G) \geq \frac{1}{|G|^{\frac{2^d-2}{2^d-1}}} > \frac{1}{|G|}.$$

3. Rezultate structurale

3.1 Grupuri nilpotente

Teorema 3.1.1. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) > \dfrac{1}{2}$. Atunci G este nilpotent.*

Corolarul 3.1.2. *Fie G un grup finit nenilpotent astfel încât $d(G) = \dfrac{1}{2}$. Au loc: 1. $G/Z(G) \cong S_3$. 2. Dacă $|Z(G)|$ este impar, atunci G are un subgrup $H \cong S_3$ astfel încât $G \cong H \times Z(G)$.*

Teorema 3.1.3. *Fie G un grup neabelian finit cu $d(G) > \dfrac{1}{2}$. Atunci*

$$G \cong G_0 \times G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k,$$

unde G_0 este un 2-grup cu $|G_0'| = 2$ şi G_i este un p_i-grup abelian cu $p_i \neq 2$, $\forall\, i = 1, 2, ..., k$.

3.2 Grupuri rezolubile

Teorema 3.2.1. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) > \dfrac{1}{12}$. Atunci G este rezolubil.*

Lema 3.2.2. *Singurul grup finit simplu neabelian cu gradul de comutativitate $\dfrac{1}{12}$ este A_5.*

Teorema 3.2.3. *Fie G un grup finit nerezolubil cu $d(G) = \dfrac{1}{12}$. Atunci există un grup abelian A astfel încât $G \cong A_5 \times A$.*

Corolarul 3.2.4. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) > \dfrac{3}{40}$. Atunci fie G este rezolubil, fie $G \cong A_5 \times A$ unde A este un grup abelian şi $d(G) = \dfrac{1}{12}$.*

3.3 Grupuri superrezolubile

Definiţia 3.3.1. Fie G_1 şi G_2 două grupuri. Spunem că o pereche (f, g) este un *izoclinism* de la G_1 la G_2 dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. f este un izomorfism de la $\frac{G_1}{Z(G_1)}$ la $\frac{G_2}{Z(G_2)}$.

2. g este un izomorfism de la G_1' la G_2'.

3. Diagrama

$$\begin{tikzcd}
\frac{G_1}{Z(G_1)} \times \frac{G_1}{Z(G_1)} \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & \frac{G_2}{Z(G_2)} \times \frac{G_2}{Z(G_2)} \arrow[d, "\alpha_2"] \\
G_1' \arrow[r, "g"'] & G_2'
\end{tikzcd}$$

   este comutativă, adică $\alpha_2 \circ (f \times f) = g \circ \alpha_1$, unde $\alpha_i(\hat{x}, \hat{y}) = [x, y]$, $\forall\, x, y \in G_i$, $i = 1, 2$.

Observaţie. Dacă G_1 şi G_2 sunt două grupuri finite izoclinice, atunci $d(G_1) = d(G_2)$.

Teorema 3.3.2. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) > \frac{5}{16}$. Atunci are loc una şi numai una din următoarele trei situaţii: 1. G este superrezolubil; 2. G este izoclinic cu A_4; 3. $G/Z(G)$ este izoclinic cu A_4.*

Corolarul 3.3.3. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) \geq \frac{1}{3}$. Atunci G este fie superrezolubil, fie izoclinic cu A_4.*

Corolarul 3.3.4. *Fie G un grup finit de ordin impar astfel încât $d(G) > \frac{11}{75}$. Atunci G este superrezolubil.*

4. Calculul gradului de comutativitate

4.1 R_{pn}-grupuri

$$R_{pn} = \langle x, y \mid x^p = y^n = 1, yxy^{-1} = x^r \rangle,$$

unde p este prim, $n \mid p-1$ şi r are gradul n modulo p

Teorema 4.1.1. $d(R_{pn}) = \frac{n^2+p-1}{n^2 p}$.

Corolarul 4.1.2. *Pentru orice număr prim p există un grup finit G cu $d(G) = \frac{1}{p-1}$, anume $G = R_{p(p-1)}$.*

4.2 D_{pq}-grupuri

$$D_{pq} = R_{pq},\ q \text{ prim}$$

Teorema 4.2.1. $d(D_{pq}) = \frac{q^2+p-1}{q^2 p}$.

Corolarul 4.2.2. *Pentru orice număr prim q există un şir de grupuri finite G_i cu $\lim_{i\to\infty} d(G_i) = \frac{1}{q^2}$, anume $G_i = D_{p_i q}$, unde $p_i = 1 + iq$, $i \in \mathbb{Z}$.*

4.3 $T_{pqn\theta}$-grupuri

$$T_{pqn\theta} = \langle x, y \mid x^p = y^{q^n} = 1, yxy^{-1} = x^{\lambda^\theta} \rangle,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, p şi q sunt prime, $q \mid p-1$, λ are ordin q modulo p şi $\theta \in \{1, 2, ..., q-1\}$

Teorema 4.3.1. $d(T_{pqn\theta}) = \frac{q+1}{pq}$.

Corolarul 4.3.2. *Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, q prim şi $\theta \in \{1, 2, ..., q-1\}$ există un şir de grupuri finite G_i cu $\lim_{i\to\infty} d(G_i) = 0$, anume $G_i = T_{p_i q n\theta}$, unde $p_i = 1 + iq$, $i \in \mathbb{Z}$.*

4.4 G_n-grupuri

$$G_n = T_{32n1}, \lambda = -1$$

Teorema 4.4.1. $d(G_n) = \dfrac{1}{2}$.

4.5 Grupuri diciclice

$$\mathrm{Dic}_n = \langle x, y \mid x^{2n} = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}, x^n = y^2 \rangle, n \geq 2$$

Teorema 4.5.1. $d(\mathrm{Dic}_n) = \dfrac{n+3}{4n}$.

Corolarul 4.5.2. $\lim_{n\to\infty} d(\mathrm{Dic}_n) = \dfrac{1}{4}$.

4.6 Grupuri cuaternionice generalizate

$$Q_{2^n} = \mathrm{Dic}_{2^{n-2}}, n \geq 3$$

Teorema 4.6.1. $d(Q_{2^n}) = \dfrac{2^{n-1}+3}{2^{n+1}}$.

Corolarul 4.6.2. $\lim_{n\to\infty} d(Q_{2^n}) = \dfrac{1}{4}$.

4.7 Grupuri diedrale

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{n-1} \rangle, n \geq 2$$

Teorema 4.7.1. $d(D_{2n}) = \begin{cases} \dfrac{n+3}{4n}, & n \text{ impar} \\ \\ \dfrac{n+6}{4n}, & n \text{ par.} \end{cases}$

Corolarul 4.7.2. $\lim_{n\to\infty} d(D_{2n}) = \dfrac{1}{4}$.

4.8 Grupuri cvasidiedrale

$$QD_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{n-2}-1} \rangle, n \geq 4$$

Teorema 4.8.1. $d(QD_{2^n}) = \dfrac{2^{n-1}+3}{2^{n+1}}$.

Corolarul 4.8.2. $\lim_{n\to\infty} d(QD_{2^n}) = \dfrac{1}{4}$.

4.9 Grupuri simetrice şi grupuri alterne

Teorema 4.9.1. *Numărul claselor de conjugare din grupul simetric S_n este egal cu numărul $p(n)$ al partiţiilor lui n. În plus,* $p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}$.

Corolarul 4.9.2. $d(S_n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}n!}\, e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} d(S_n) = 0$.

Teorema 4.9.3. *Numărul claselor de conjugare din grupul altern A_n este* $k(A_n) = \frac{p(n)}{2} + \frac{3}{2}(-1)^n \sum_{|r|<\sqrt{n}} (-1)^r p\left(\frac{n}{2} - \frac{3r^2+r}{4}\right) \approx \frac{1}{8n\sqrt{3}}\, e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}$.

Corolarul 4.9.4. $d(A_n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}n!}\, e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$.

Corolarul 4.9.5. $k(A_n) \approx \frac{p(n)}{2}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \frac{d(S_n)}{d(A_n)} = 1$.

5. Valori posibile ale gradului de comutativitate

5.1 Valori posibile în intervalul $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Teorema 5.1.1. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) > \frac{1}{2}$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(G) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\right)$. În plus, are loc una din următoarele două situaţii:*

1. *G este abelian.*
2. *$G \cong G_0 \times A$, unde G_0 este un 2-grup, A este un grup abelian şi $|G'| = 2$.*

Teorema 5.1.2. *Fie G un grup finit astfel încât $d(G) = \frac{1}{2}$. Atunci $G \cong G_n \times A$, unde $G_n = \langle x, y \mid x^{2^n} = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$, $n \geq 1$ şi A este un grup abelian.*

5.2 Valori posibile pentru grupuri G cu $|G/Z(G)| < 12$

Teorema 5.2.1. *Fie G un grup finit astfel încât $|G/Z(G)| < 12$ şi $G/Z(G)$ este abelian. Are loc una din următoarele situaţii:*

1. *Dacă $G/Z(G)$ este ciclic, atunci G este abelian şi astfel $d(G) = 1$.*
2. *Dacă $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, atunci $d(G) = \frac{5}{8}$.*
3. *Dacă $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, atunci $d(G) = \frac{11}{27}$.*
4. *Dacă $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, atunci $d(G)$ nu poate fi precizat.*

Observaţie. Nu există grupuri finite G pentru care $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Exemplu. Fie G_1 şi G_2 următoarele grupuri de ordin 64:

$$\begin{aligned}G_1 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^4 = 1, (xz^{-2})^2 = (yz^{-2})^2, (xz^{-1})^4 = (yz^{-1})^4,\\ (yxz^{-1})^3 = zx^{-1}y^{-1}, (yxy)^{-1} = xz^2, (zyzx)^{-1} = z^{-1}yzx\rangle,\\ G_2 = \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^4 = 1, xy^2 = y^2x, yx^2 = x^2y, xz^2 = z^2x,\\ zx^2 = x^2z, yz = zy, xyz^{-1} = yxz, xzy^{-1} = zxy\rangle.\end{aligned}$$

Atunci $G_i/Z(G_i) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $i = 1, 2$, şi $d(G_1) = \dfrac{11}{32} \neq \dfrac{7}{16} = d(G_2)$.

Teorema 5.2.2. *Fie G un grup finit astfel încât $|G/Z(G)| < 12$ şi $G/Z(G)$ este neabelian. Are loc una din următoarele situaţii:*

1. *Dacă $G/Z(G) \cong S_3$, atunci $G \cong G_n \times A$, unde $n \geq 1$, A este un grup abelian şi $d(G) = \dfrac{1}{2}$.*
2. *Dacă $G/Z(G) \cong D_8$, atunci $d(G) = \dfrac{7}{16}$.*
3. *Dacă $G/Z(G) \cong D_{10}$, atunci $d(G) = \dfrac{2}{5}$.*

Observaţie. Nu există grupuri finite G pentru care $G/Z(G) \cong Q_8$.

5.3 Valori posibile de tipul $\dfrac{1}{p}$ cu p prim

Teorema 5.3.1. *Pentru orice număr prim p există un grup finit G cu $d(G) = \dfrac{1}{p}$. În plus, G este produs direct de grupuri rezolubile.*

Corolarul 5.3.2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un grup finit rezolubil G cu $d(G) = \dfrac{1}{n}$.*

Corolarul 5.3.3. *Pentru orice număr prim p de forma $2^k - 1$ (număr prim Marsenne) există un grup finit indecompozabil G cu $d(G) = \dfrac{1}{p}$.*

Teorema 5.3.4. *Fie p un număr prim. Atunci $d(G) \neq \dfrac{1}{p}$ pentru orice grup finit nilpotent G.*

6. Probleme deschise

Problema 6.1. Pentru ce numere naturale m şi n cu $m < n$ există un grup finit G astfel încât $d(G) = \dfrac{m}{n}$?

Problema 6.2. Dat un număr iraţional $a \in [0, 1]$, există un şir de grupuri finite G_n, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} d(G_n) = a$?

Problema 6.3. Este mulţimea gradelor de comutativitate ale grupurilor neabeliene finite densă în intervalul $\left[0, \frac{5}{8}\right]$?

Problema 6.4. Ce se poate spune despre două grupuri finite G_1 şi G_2 pentru care $d(G_1) = d(G_2)$?

Problema 6.5. Dat $a \in \left[0, \frac{5}{8}\right]$, determinaţi grupurile finite G pentru care $d(G)=a$.

Bibliografie

1. **A. Castelaz** – *Commutativity degree of finite groups*, Master Degree Thesis, Wake Forest University, U.S.A., 2010.
2. **F. Barry, D. MacHale, A.N. Shé** – *Some supersolvability conditions for finite groups*, Math. Proc. R. Ir. Acad., 106 (2006), 163177.
3. **P. Erdös, P. Turan** – *On some problems of a statistical group theory*, IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968), 413-435.
4. **A. Erfanian, P. Lescot, R. Rezaei** – *On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group*, Comm. Algebra, 35 (2007), 4183-4197.
5. **R.M. Guralnick, G.R. Robinson** – *On the commuting probability in finite groups*, J. Algebra, 300 (2006), 509-528.
6. **W.H. Gustafson** – *What is the probability that two group elements commute*?, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 1031-1034.
7. **P. Hall** – *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. London Math. Soc., 36 (1933), 29-95.
8. **K.S. Joseph** – *Commutativity in non-abelian groups*, Ph.D. Thesis, University of California, L.A., 1969.
9. **P. Lescot** – *Sur certains groupes finis*, Rev. Math. Spéciales, 8 (1987), 276-277.
10. **P. Lescot** – *Degré de commutativité et structure d'un groupe fini* (1), Rev. Math. Spéciales, 8 (1988), 276-279.
11. **P. Lescot** – *Degré de commutativité et structure d'un groupe fini* (2), Rev. Math. Spéciales, 4 (1989), 200-202.
12. **P. Lescot** – *Isoclinism classes and commutativity degrees of finite groups*, J. Algebra, 177 (1995), 847-869.
13. **P. Lescot** – *Central extensions and commutativity degree*, Comm. Algebra, 29 (2001), 4451-4460.
14. **P. Lescot, H.N. Nguyen, Y. Yang** – *On the commuting probability and supersolvability of finite groups*, Monatsh. Math., 174 (2014), 567-576.
15. **D.J. Rusin** – *What is the probability that two elements of a finite group commute*?, Pacific J. Math., 82 (1979), 237-247.
16. **G. Sherman** – *What is the probablity an automorphism fixes a group element*?, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 261-264.
17. **G. Sherman** – *A lower bound for the number of conjugacy classes in a finite nilpotent group*, Pacific J. Math., 80 (1979), 253-254.