Câteva proprietăţi legate de o ceviană de ordin k

Andi BROJBEANU[1]***, Titu ZVONARU***[2]

Abstract. Let ABC be a triangle with its sides $a = BC, b = CA, c = AB$. Let I, G, L denote the incenter, the centroid and − respectively − the Lemoine point. If $c < a < b$ or $c > a > b$, the lines IG, IL and GL cut the sides AB and AC at the points P_{IG}, P_{IL}, $P_{GL} \in (AB)$, respectively Q_{IG}, Q_{IL}, $Q_{GL} \in (AC)$. In this paper, the conditions under which the pairs of lines (BQ_{IG}, CP_{IG}), (BQ_{IL}, CP_{IL}), (BQ_{GL}, CP_{GL}) meet on the line AD, the Cevian line of order k from the vertex A, are established. Finally, some particular cases of these results are presented.

Keywords: Cevian line of order k, incenter, centroid, symmedian, Lemoine point.

MSC 2010: 51M04.

Fie ABC un triunghi cu laturile $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Considerăm un punct D situat pe latura BC astfel încât $\dfrac{BD}{DC} = \left(\dfrac{c}{b}\right)^k$ (adică AD este o ceviană de ordin k, $k \in \mathbb{R}$). Paralela prin D la AB intersectează latura AC în punctul E, iar paralela prin D la AC intersectează latura AB în punctul F.

Notăm cu $M(k)$ suma $DE + DF$. Folosind asemănarea, obţinem uşor că

$$M(k) = \frac{bc^k + b^k c}{b^k + c^k}.$$

Proprietate. *Funcţia $M(k)$ este descrescătoare.*

Demonstraţie. Fie $k > l$. Obţinem succesiv:

$$M(k) \le M(l) \Leftrightarrow \frac{bc^k + b^k c}{b^k + c^k} \le \frac{bc^l + b^l c}{b^l + c^l} \Leftrightarrow b^{l+1}c^k + b^k c^{l+1} + bc^{k+l} + b^{k+l}c \le$$
$$\le b^{k+1}c^l + b^l c^{k+1} + b^{k+l}c + bc^{k+l} \Leftrightarrow (b - c)\left[\left(\frac{b}{c}\right)^k - \left(\frac{b}{c}\right)^l\right] \ge 0,$$

adevărat pentru orice b şi c. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $b = c$.

Observaţie. Avem $bc = M(k)M(1-k)$ şi $M(-k) = \dfrac{b^{k+1} + c^{k+1}}{b^k + c^k}, \forall k \in \mathbb{R}$.

Aplicaţii. 1) Din $M(1) \le M(1/2) \le M(0)$, avem: $\dfrac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc} \le \dfrac{b+c}{2}$, adică inegalităţile dintre mediile armonică, geometrică şi aritmetică a numerelor b şi c.

2) Din $M(0) \le M(-1)$, obţinem: $\dfrac{b+c}{2} \le \dfrac{b^2+c^2}{b+c} \Rightarrow \dfrac{b+c}{2} \le \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}$, adică inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică a numerelor b şi c.

3) Avem:

$$\frac{b^n + c^n}{2} \ge \left(\frac{b+c}{2}\right)^n \quad (*), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

[1] Elev, cl. a XII-a, Colegiul Naţional ,,C.Carabella", Târgovişte, e-mail: *andi_bro@yahoo.com*

[2] Comăneşti, e-mail: *tzvonaru@yahoo.com*

Într-adevăr,

– pentru $n<0$, din $M(0)\geq M(i), \forall i=\overline{1,-n}$, obţinem că

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^{-n}=M(0)^{-n}\geq\prod_{i=1}^{-n}M(i)=\prod_{i=1}^{-n}\frac{b^{1-i}+c^{1-i}}{b^{-i}+c^{-i}}=\frac{2}{b^n+c^n}\Rightarrow(*);$$

– pentru $n=0$, $\dfrac{b^n+c^n}{2}=\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^n=1$;

– pentru $n>0$, din $M(0)\leq M(-i), \forall i=\overline{0,n-1}$, obţinem că

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^{n}=M(0)^{n}\leq\prod_{i=0}^{n-1}M(-i)=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{b^{i+1}+c^{i+1}}{b^{i}+c^{i}}=\frac{b^n+c^n}{2}\Rightarrow(*).$$

În cele ce urmează vom prezenta o legătură a expresiei $M(k)$ cu *dreapta lui Nagel*, determinată de I-centrul cercului înscris şi G-centrul de greutate, cu *dreapta determinată de I şi L*-punctul lui Lemoine şi cu *dreapta determinată de G şi L*.

În cazul în care are loc condiţia $c<a<b$ vom vedea că aceste drepte intersectează laturile AB şi AC şi nu prelungirile acestora (este suficient să avem $(a-b)(a-c)<0$; rezultatele ce urmează sunt valabile şi pentru cazul $c>a>b$).

Fie D_X piciorul cevienei AX, $X\in\{I,G,L\}$. Dreptele IG, IL, respectiv GL intersectează dreptele AB şi AC în punctele P_{IG} şi Q_{IG}, P_{IL} şi Q_{IL}, respectiv P_{GL} şi Q_{GL}. Notăm $x_{XY}=\dfrac{\overrightarrow{AP_{XY}}}{\overrightarrow{P_{XY}B}}$ şi $y_{XY}=\dfrac{\overrightarrow{AQ_{XY}}}{\overrightarrow{Q_{XY}B}}$, unde $XY\in\{IG,IL,GL\}$. Vom calcula aceste rapoarte în două moduri:

I. Din teorema bisectoarei şi teorema lui Steiner obţinem:

$$BD_I=\frac{ac}{b+c}, CD_I=\frac{ab}{b+c},\quad BD_L=\frac{ac^2}{b^2+c^2}, CD_L=\frac{ab^2}{b^2+c^2}.$$

În ipoteza $c<a<b$, este uşor de verificat că pe latura BC avem ordinea $B-D_L-D_I-D_G-C$ şi atunci au loc:

$$D_ID_G=\frac{a(b-c)}{2(b+c)},\quad D_GD_L=\frac{a(b^2-c^2)}{2(b^2+c^2)},\quad D_ID_L=\frac{abc(b-c)}{(b+c)(b^2+c^2)}.$$

Folosind teorema lui Van Aubel pentru ceviana AD_X de ordin k obţinem $\dfrac{AX}{XD_X}=\dfrac{b^k+c^k}{a^k}$ şi atunci

$$\frac{AI}{ID_I}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{AG}{GD_G}=2,\quad \frac{AL}{LD_L}=\frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Vom avea nevoie şi de următorul rezultat (relaţia (R_2) din [**1**], p.108):

Lemă. *Fie ABC un triunghi şi punctul $D \in (BC)$. Dacă o secantă intersectează laturile AB, AC şi ceviana AD în punctele M, N, respectiv P, atunci*

$$\frac{AP}{PD} = \frac{BC \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC}}{BD \cdot \frac{AM}{MB} + DC \cdot \frac{AN}{NC}}.$$

Aplicând această Lemă la triunghiul ABD_G (cu ceviana AD_I), apoi la triunghiul ACD_I (cu ceviana AD_G), obţinem:

$$\frac{AI}{ID_I} = \frac{BD_G \cdot \dfrac{AP_{IG}}{P_{IG}B} \cdot \dfrac{AG}{GD_G}}{BD_I \cdot \dfrac{AP_{IG}}{P_{IG}B} + D_I D_G \cdot \dfrac{AG}{GD_G}} \Rightarrow x_{IG} = \frac{b-c}{a-c},$$

$$\frac{AG}{GD_G} = \frac{D_I C \cdot \dfrac{AI}{ID_I} \cdot \dfrac{AQ_{IG}}{Q_{IG}C}}{D_I D_G \cdot \dfrac{AI}{ID_I} + D_G C \cdot \dfrac{AQ_{IG}}{Q_{IG}C}} \Rightarrow y_{IG} = \frac{b-c}{b-a}.$$

Analog,

$$x_{IL} = \frac{b(b-c)}{a(a-c)}, \quad y_{IL} = \frac{c(b-c)}{a(b-a)}; \quad x_{GL} = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \quad y_{GL} = \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}.$$

Deoarece $c < a < b$, observăm că, într-adevăr, punctele P şi Q aparţin laturilor respective.

II. Dacă $P \in AB$ şi $Q \in AC$ astfel încât $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = x$ şi $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} = y$, atunci au loc următoarele relaţii cunoscute:

1. $G \in PQ \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1,$
2. $I \in PQ \Leftrightarrow \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{y} = a,$
3. $L \in PQ \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{x} + \dfrac{c^2}{y} = a^2$

(cititorul poate demonstra aceste afirmaţii cu uşurinţă pe baza Lemei).

Cu notaţiile folosite în metoda I, obţinem aceleaşi valori pentru x_{XY} şi y_{XY} în urma rezolvării celor trei sisteme formate cu relaţiile de mai sus.

Propoziţia 1. *Dreptele BQ_{IG} şi CP_{IG} se intersectează pe dreapta AD (adică pe ceviana de ordin k) dacă şi numai dacă $a = M(k)$.*

Demonstraţie. Conform teoremei lui Ceva, avem că dreptele AD, BQ_{IG}, CP_{IG} sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{CQ_{IG}}{AQ_{IG}} \cdot \frac{AP_{IG}}{BP_{IG}} = 1 \Leftrightarrow \frac{c^k}{b^k} \cdot \frac{b-a}{b-c} \cdot \frac{b-c}{a-c} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{bc^k + b^k c}{b^k + c^k} \Leftrightarrow a = M(k).$$

Propoziţia 2. *Dreptele BQ_{IL} şi CP_{IL} se intersectează pe dreapta AD (adică pe ceviana de ordin k) dacă şi numai dacă $a = M(k-1)$.*

Demonstraţie. Conform teoremei lui Ceva, avem că dreptele AD, BQ_{IL}, CP_{IL} sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{CQ_{IL}}{AQ_{IL}} \cdot \frac{AP_{IL}}{BP_{IL}} = 1 \Leftrightarrow \frac{c^k}{b^k} \cdot \frac{a(b-a)}{c(b-c)} \cdot \frac{b(b-c)}{a(a-c)} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{bc^{k-1} + b^{k-1}c}{b^{k-1} + c^{k-1}} \Leftrightarrow a = M(k-1).$$

Propoziţia 3. *Dreptele BQ_{GL} şi CP_{GL} se intersectează pe dreapta AD (adică pe ceviana de ordin k) dacă şi numai dacă $a^2 = M(k)M(k-1)$.*

Demonstraţie. Conform teoremei lui Ceva, avem că dreptele AD, BQ_{GL}, CP_{GL} sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{CQ_{GL}}{AQ_{GL}} \cdot \frac{AP_{GL}}{BP_{GL}} = 1 \Leftrightarrow \frac{c^k}{b^k} \cdot \frac{b^2-a^2}{b^2-c^2} \cdot \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{b^2c^k + b^kc^2}{b^k + c^k} \Leftrightarrow a^2 = M(k)M(k-1).$$

Cazuri particulare. 1) Dreptele BQ_{IG} şi CP_{IG} se intersectează pe mediana din A dacă şi numai dacă a este media aritmetică a numerelor b şi c;

2) Dreptele BQ_{IG} şi CP_{IG} se intersectează pe ceviana de ordin $\frac{1}{2}$ din A dacă şi numai dacă a este media geometrică a numerelor b şi c;

3) Dreptele BQ_{IG} şi CP_{IG} se intersectează pe bisectoarea din A dacă şi numai dacă a este media armonică a numerelor b şi c;

4) Dreptele BQ_{IL} şi CP_{IL} se intersectează pe bisectoarea din A dacă şi numai dacă a este media aritmetică a numerelor b şi c.

5) Dreptele BQ_{IL} şi CP_{IL} se intersectează pe ceviana de ordin $\frac{3}{2}$ din A dacă şi numai dacă a este media geometrică a numerelor b şi c.

6) Dreptele BQ_{IL} şi CP_{IL} se intersectează pe simediana din A dacă şi numai dacă a este media armonică a numerelor b şi c.

7) Dreptele BQ_{GL} şi CP_{GL} se intersectează pe mediana din A dacă şi numai dacă a este media pătratică a numerelor b şi c.

8) Dreptele BQ_{GL} şi CP_{GL} se intersectează pe bisectoarea din A dacă şi numai dacă a este media geometrică a numerelor b şi c.

9) Dreptele BQ_{GL} şi CP_{GL} se intersectează pe simediana din A dacă şi numai dacă a^2 este media armonică a numerelor b^2 şi c^2.

Bibliografie

1. **T. Zvonaru, N. Stanciu** – *Alte proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral*, Recreaţii Matematice, 2/2011, 108-111.