Observaţii asupra cercurilor mixtliniare

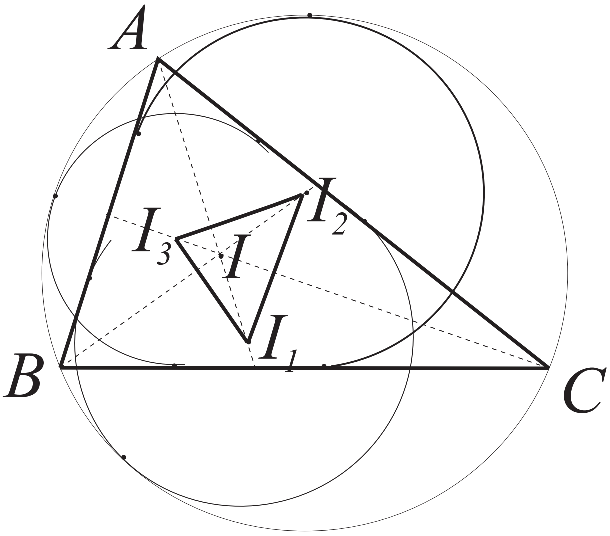
Neculai ROMAN[1]

Abstract. In this Note, a few remarks on the shape of the triangles determined by the centers of the mixtilinear circles are formulated.

Keywords: incenter, mixtilinear circles.

MSC 2010: 51M04.

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{I}$ cercurile circumscris şi, respectiv, înscris triunghiului ABC. Să notăm cu $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ cercurile mixtliniare înscrise şi cu $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ cele mixtliniare exînscrise triunghiului ABC dat. Amintim că $\mathcal{I}_1$ (respectiv $\mathcal{J}_1$) este cercul tangent la laturile



unghiului $\widehat{BAC}$ şi tangent interior (respectiv, exterior) cercului $\mathcal{C}$. Vom nota cu I_1, r_1 centrul şi raza cercului $\mathcal{I}_1$ şi cu $\mathcal{J}_1, \rho_1$ centrul şi raza cercului J_1; notaţii analoage relativ la cercurile $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ şi $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$.

În prezenta Notă vom face precizări asupra formei triunghiurilor $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ – triunghiurile centrelor cercurilor mixtliniare.

Cunoştinţele despre cercurile mixtliniare de care vom avea nevoie se găsesc în lucrările [**1**], [**2**], [**4**]; astfel, avem:

$$r_1 = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \quad \rho_1 = \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} \quad \text{(şi analoagele)}, \tag{1}$$

unde r_a este raza cercului exînscris tangent la BC. De asemenea, vom utiliza Propoziţia 1 din [**2**], care afirmă că *triunghiurile $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ sunt omotetice cu centrul de omotetie I şi raportul* $\dfrac{4R+r}{r}$.

[1]Profesor, Şcoala Generală ,,Vasile Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)

Propoziţia 1. *Triunghiurile $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ sunt ascuţitunghice.*

Demonstraţie. Să arătăm numai faptul că $I_2I_3^2 < I_1I_2^2 + I_1I_3^2$, celelalte două inegalităţi similare dovedindu-se la fel. Utilizând teorema cosinusului şi relaţiile $\cos(\widehat{I_2II_3}) = \sin\dfrac{A}{2}$ etc., avem:

$$\begin{aligned} I_1I_2^2+I_1I_3^2-I_2I_3^2 &= \left(II_1^2+II_2^2+2II_1\cdot II_2\sin\frac{C}{2}\right)+\left(II_1^2+II_3^2+2II_1\cdot II_3\sin\frac{B}{2}\right)- \\ &-\left(II_2^2+II_3^2+2II_2\cdot II_3\sin\frac{A}{2}\right)= \\ &=2\left(II_1^2+II_1\cdot II_2\sin\frac{C}{2}+II_1\cdot II_3\sin\frac{B}{2}-II_2\cdot II_3\sin\frac{A}{2}\right). \end{aligned}$$

Se constată că

$$II_1 = AI_1 - AI = \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}-1\right) = \frac{r\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Deci au loc relaţiile:

$$II_1 = \frac{r\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}},\quad II_2 = \frac{r\sin\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}},\quad II_3 = \frac{r\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}. \tag{2}$$

Ca urmare, obţinem că

$$I_1I_2^2+I_1I_3^2-I_2I_3^2 = 2r^2\left[\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^4\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\left(\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\right)\right].$$

Cum $\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}-\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos B+\cos C-\cos A) = \dfrac{1}{2}(1-\cos A) + \dfrac{1}{2}(\cos B+\cos C) = \sin\dfrac{A}{2}\left(\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B-C}{2}\right) = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, rezultă că $\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}-\cos^2\dfrac{A}{2} > 0$ şi, deci, $I_1I_2^2+I_1I_3^2-I_2I_3^2 > 0$. În final, triunghiul $I_1I_2I_3$, este ascuţitunghic.

În acelaşi mod, se poate arăta că şi triunghiul $J_1J_2J_3$ este ascuţitunghic, dar această afirmaţie rezultă mai simplu din omotetia lor.

Propoziţia 2. *Dacă unul dintre triunghiurile ABC, $I_1I_2I_3$, $J_1J_2J_3$ este isoscel, atunci şi celelalte două sunt isoscele.*

Demonstraţie. Dacă ABC este isoscel, din simetria acestuia deducem imediat că triunghiurile $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ sunt isoscele.

Deoarece $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ sunt omotetice, deci sunt asemenea, rezultă că, pentru a încheia demonstraţia, este suficient să dovedim afirmaţia: dacă $I_1I_2I_3$ este isoscel, atunci şi triunghiul ABC este isoscel.

Să presupunem că $I_1I_2 = I_1I_3$. Utilizând din nou teorema cosinususlui în triunghiurile II_1I_2 şi II_1I_3, avem:

$$I_1I_2^2 = I_1I_3^2 \Leftrightarrow II_1^2 + II_2^2 + 2II_1 \cdot II_2 \sin\frac{C}{2} = II_1^2 + II_3^2 + 2II_1 \cdot II_3 \sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow (II_2^2 - II_3^2) + 2(II_1 \cdot II_2 \sin\frac{C}{2} - II_1 \cdot II_3 \sin\frac{B}{2}) = 0$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\cos^4\frac{B}{2}} - \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^4\frac{C}{2}}\right) + \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)\left[\left(\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} - 1\right) + \frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\right] = 0.$$

Observăm că paranteza pătrată este pozitivă, căci

$$\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} - 1 = \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right) + \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right) - 1 =$$
$$= 1 + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} > 0.$$

Ca urmare,

$$I_1I_2 = I_1I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C,$$

adică triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$.

Observaţii. 1) Evident, dacă unul dintre triunghiurile ABC, $I_1I_2I_3$, $J_1J_2J_3$ este echilateral, atunci această proprietate se transmite şi celorlalte.

2) În [**3**] se găseşte o proprietate strâns legată de conţinutul acestei Note: dacă triunghiurile $I_1I_2I_3$ şi ABC sunt asemenea, atunci ele sunt echilaterale. Evident, proprietatea rămâne valabilă dacă în acest enunţ considerăm triunghiul $J_1J_2J_3$ în locul lui $I_1I_2I_3$.

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *A Mixtilinear Adventure*, Crux Math., 9 (1983), 2-7.
2. **T. Bîrsan** – *Ariile unor triunghiuri asociate cercurilor mixtliniare*, Recreaţii Matematice, p. 9-14.
3. **A. Jorza** – *Problema C.2002.2*, Revista de Matematică din Timişoara, 2002, nr. 1, p.48.
4. **P. Yiu** – *Mixtilinear Circles*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), nr. 10, 952-955.