Asupra unei clase de inegalităţi

Dan Ştefan MARINESCU [1], ***Mihai MONEA*** [2]

Abstract. The purpose of this note is to analyze a special class of inequalities proposed in various elementary math journals.

Keywords: inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, increasing function, convex function.

MSC 2010: 97H30.

În [**1**] găsim problema nr. 113 cu următorul enunţ:

Dacă a, b, c sunt trei numere reale strict pozitive, atunci

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3, \tag{1}$$

iar în [**2**] este propusă o inegalitatea asemănătoare:
Să se demonstreze că

$$\sqrt{\frac{11a}{5a+6b}}+\sqrt{\frac{11b}{5b+6c}}+\sqrt{\frac{11c}{5c+6a}}\leq 3, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2}$$

Rezolvarea acestora, pe baza inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz, se poate găsi în [**1**], pag. 106, respectiv în [**3**].

Vom examina mai jos şi următoarele două inegalităţi de acelaşi fel:

$$\sqrt{\frac{4a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{4b}{b+3c}}+\sqrt{\frac{4c}{c+3a}}\leq 3, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \tag{3}$$

$$\sqrt{\frac{7a}{4a+3b}}+\sqrt{\frac{7b}{4b+3c}}+\sqrt{\frac{7c}{4c+3a}}\leq 3, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4}$$

Scopul prezentei note este studiul clasei de inegalităţi de tipul celor de mai sus. Pentru aceasta, să considerăm funcţia $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\sqrt{\frac{a}{xa+(1-x)\,b}}+\sqrt{\frac{b}{xb+(1-x)\,c}}+\sqrt{\frac{c}{xc+(1-x)\,a}},$$

unde numerele $a, b, c > 0$ sunt fixate şi măcar două dintre ele diferite.

Se observă că inegalităţile (1), (2), (3), (4) sunt echivalente cu $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 3$, $f\left(\frac{5}{11}\right) \leq 3$, $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq 3$, respectiv $f\left(\frac{4}{7}\right) \leq 3$.

În acest context, ne punem problema determinării elementelor mulţimii

$$S=\{x\in[0,\ 1]\mid f(x)\leq 3\},$$

[1] Colegiul Naţional „Iancu de Hunedoara", Hunedoara; e-mail: *marinescuds@gmail.com*

[2] Profesor, Colegiul Naţional „Decebal", Deva; e-mail: *mihaimonea@yahoo.com*

despre care ştim deja că $\frac{1}{2}, \frac{5}{11} \in S$. Prin calcul direct obţinem:

$$f'(x) = \sum_{ciclic} -\frac{\sqrt{a}}{2} \cdot (a-b) \cdot (xa + (1-x)\, b)^{-\frac{3}{2}},$$
$$f''(x) = \sum_{ciclic} \frac{3\sqrt{a}}{4} \cdot (a-b)^2 \, (xa + (1-x)\, b)^{-\frac{5}{2}}.$$

Evident $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [0,\ 1]$, deci f este strict convexă, iar f' este strict crescătoare. Avem:

$$f'(1) = \sum_{ciclic} -\frac{\sqrt{a}}{2}(a-b)\, a^{-\frac{3}{2}} = \sum_{ciclic} \frac{b-a}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} - 3\right).$$

şi, conform inegalităţii mediilor, rezultă că $f'(1) > 0$. Apoi,

$$f'(0) = \sum_{ciclic} -\frac{\sqrt{a}}{2} \cdot (a-b) \cdot b^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} - \frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} - \frac{c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}\right).$$

Pentru studiul valorii $f'(0)$ folosim funcţia ajutătoare $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x + \left(\frac{c}{a}\right)^x.$$

Această funcţie este strict convexă, deci are un singur punct de minim. Găsim imediat că

$$g'(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln\frac{a}{b} + \left(\frac{b}{c}\right)^x \ln\frac{b}{c} + \left(\frac{c}{a}\right)^x \ln\frac{c}{a},$$

de unde $g'(0) = 0$. Cum g' este strict crescătoare, deducem că $x = 0$ este singurul punct de minim. Ca urmare, $g'(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (0,\ \infty)$, deci g este strict crescătoare pe acest interval. Atunci, avem:

$$f'(0) = \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{3}{2}\right)\right) < 0.$$

Deoarece f' este strict crescătoare şi are proprietatea lui Darboux, există un unic $\alpha \in (0,\ 1)$ astfel încât $f'(\alpha) = 0$. Rezultă că $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in [0, \alpha)$ şi $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (\alpha, 1]$.

Din faptul că f este strict crescătoare pe intervalul $[\alpha, 1]$ şi din $f(1) = 3$, deducem că $f(\alpha) < 3$. Mai avem că f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \alpha]$ şi

$$f(0) = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Conform inegalităţii mediilor, avem că $f(0) > 3$. Atunci există un unic $\beta \in (0, \alpha)$ astfel încât $f(\beta) = 3$. Prin urmare $f(x) > 3$ pentru orice $x \in [0, \beta)$ şi $f(x) \leq 3$ pentru orice $x \in [\beta,\ 1]$.

Deoarece inegalităţile (1) şi (2) sunt adevărate, deducem că $\frac{5}{11}, \ \frac{1}{2} \in [\beta, \ 1]$, deci $0 < \beta \leq \frac{5}{11}$. Cum valoarea numărului β este dependentă de numerele a, b, c, nu vom putea determina cu exactitate un interval pentru care $f(x) \leq 3$ oricare ar fi $a, b, c > 0$.

Observaţii. 1) Inegalităţile (1) şi (2) sunt adevărate pentru orice numere strict pozitive a, b, c. Cum $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, obţinem că $\frac{4}{7} \in [\beta, \ 1]$, adică inegalitatea $f\left(\frac{4}{7}\right) \leq 3$ este adevărată, deci şi inegalitatea (4).

2) Pe de altă parte, $\frac{1}{4} < \frac{5}{11}$ şi nu putem oferi informaţii despre inegalitatea (3). Mai mult, alegând $a = 3$, $b = 2$ şi $c = 1$ avem:

$$\sqrt{\frac{4a}{a+3b}} + \sqrt{\frac{4b}{b+3c}} + \sqrt{\frac{4c}{c+3a}} = \sqrt{\frac{12}{9}} + \sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{4}{10}} > 1,15 + 1,26 + 0,63 = 3,04,$$

ceea ce demonstrează că inegalitatea (3) nu este adevărată oricare ar fi $a, b, c > 0$.

În continuare, vom aborda inegalitatea $f(x) \leq 3$ folosind aceeaşi idee de rezolvare ca şi pentru inegalităţile (1) şi (2); cu ajutorul inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Avem:

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &= \left(\sqrt{\frac{a}{xa+(1-x)b}} + \sqrt{\frac{b}{xb+(1-x)c}} + \sqrt{\frac{c}{xc+(1-x)a}}\right)^2 \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{[xa+(1-x)b][xb+(1-x)c]} + \frac{1}{[xb+(1-x)c][xc+(1-x)a]} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{[xc+(1-x)a][xa+(1-x)b]}\right) \cdot \\
&\qquad \cdot (a[xb+(1-x)c] + b[xc+(1-x)a] + c[xa+(1-x)b]) \\
&= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{[xa+(1-x)b][xb+(1-x)c][xc+(1-x)a]}.
\end{aligned}$$

Ar fi suficient să demonstrăm că

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9[xa+(1-x)b][xb+(1-x)c][xc+(1-x)a].$$

Dar

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c + 3abc,$$

iar

$$\begin{aligned}
&9(xa+(1-x)b)(xb+(1-x)c)(xc+(1-x)a) = \\
&= 9\left(x^3 + (1-x)^3\right)abc + 9x^2(1-x)\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \\
&+ 9x(1-x)^2\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right).
\end{aligned}$$

Din inegalitatea mediilor avem: $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$ şi $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3abc$. Dacă ar fi îndeplinite condiţiile

$$9x^2(1-x) \geq 1 \tag{5}$$

şi

$$9x(1-x)^2 \geq 1, \tag{6}$$

atunci am avea

$$\begin{aligned}
&9\left(x^3 + (1-x)^3\right)abc + 9x^2(1-x)\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + 9x(1-x)^2\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) = \\
&= 9\left(x^3 + (1-x)^3\right)abc + \left(9x^2(1-x) - 1\right)\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \\
&+ \left(9x(1-x)^2 - 1\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c \geq \\
&\geq 9\left(x^3 + (1-x)^3\right)abc + \left(9x^2(1-x) - 1\right)3abc + \\
&+ \left(9x(1-x)^2 - 1\right)3abc + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c \\
&= 3abc + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c,
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dar condiţiile (5), (6) şi $x \in [0,1]$ conduc la concluzia $x \in [u,v]$, unde $u \approx 0,4491$ şi $v \approx 0,5509$. În afara acestui interval nu avem certitudinea obţinerii rezultatului prin această metodă.

Observaţii. 1) Inegalitatea (4) este adevărată, dar nu poate fi demonstrată pe calea de mai înainte.

2) Inegalitatea (3), dovedită ca falsă prin contraexemplu, este în afara ariei de aplicare a celor două procedee discutate mai sus.

Bibliografie

1. **T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu** – *Old and New Inequalities*, Ed. Gil, Zalău, 2004.
2. **M. Chirciu** – *Problema 26512*, Gazeta Matematică, CXVI, 10/2011, pag. 482.
3. ******* – *Rezolvarea Problemei 26512*, Gazeta Matematică, CXVII, 4/2012, pag. 205.
