Studiul unui şir recurent de numere reale

Mihai DICU[1]

Abstract. In this paper we study the recurrent sequence of real numbers given by $x_{n+1} = ax_n + \dfrac{b}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, where $a, b, x_0 \in (0, \infty)$.

Keywords: recurrent sequence, monotony, convergence, divergence, limit.

MSC 2010: 40A05.

Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $a, b, x_0 \in (0, \infty)$.

Propoziţie. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

a) dacă $a \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, *atunci şirul* $(x_n)_n$ *este monoton şi mărginit şi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\dfrac{b}{1-a}}$;

b) dacă $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, *atunci* $(x_n)_n$ *se descompune în două subşiruri* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *mărginite, monotone începând de la un anumit rang, având aceeaşi limită egală cu* $\sqrt{\dfrac{b}{1-a}}$;

c) dacă $a = 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2b}$;

d) dacă $a > 1$ *şi* $\alpha \in (0, \infty)$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\alpha^n} = \begin{cases} 0, & \alpha > a \\ x_0 + \dfrac{b}{a} l, & \alpha = a \\ \infty, & \alpha < a \end{cases}$,

unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{ax_1} + \dfrac{1}{a^2x_2} + \ldots + \dfrac{1}{a^{n-1}x_{n-1}}\right)$.

Demonstraţie. Să observăm că $x_0 > 0 \Rightarrow x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) I. Mai întâi vom considera cazul (foarte cunoscut) $a = \dfrac{1}{2}$, în care $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{b}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Avem:

$$x_{n+1} \geq 2\sqrt{\frac{x_n}{2}\,\frac{b}{x_n}} = \sqrt{2b}, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2b - x_n^2}{2x_n} = \frac{(\sqrt{2b} + x_n)(\sqrt{2b} - x_n)}{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2}$$

ceea ce înseamnă că $(x_n)_n$ este descrescător începând cu x_1;

[1]Profesor, Colegiul Naţional „Fraţii Buzeşti", Craiova; e-mail: *mihai_dicu2003@yahoo.fr*

(3) $0 < x_n \leq \max(x_0, x_1)$,
ceea ce înseamnă că $(x_n)_n$ este mărginit.

Din cele expuse mai sus rezultă că $(x_n)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2b}$.

Observaţia 1. Pentru $x_0 = \sqrt{2b}$ şirul este constant.

Observaţia 2. Termenul general al şirului şi limita sa se pot determina demonstrând prin inducţie matematică formula:

$$x_n = \sqrt{2b}\frac{(x_0+\sqrt{2b})^{2^n} + (x_0-\sqrt{2b})^{2^n}}{(x_0+\sqrt{2b})^{2^n} - (x_0-\sqrt{2b})^{2^n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

II. Pentru cazul $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ considerăm funcţia $f : (0, +\infty) \to (0, \infty)$ dată prin $f(x) = ax + \frac{b}{x}$. Constatăm cu uşurinţă următoarele:

(4) funcţia f are un punct fix unic $c = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$;

(5) ecuaţia $f(x) = c \Leftrightarrow ax^2 - cx + b = 0$ are rădăcinile $t_1 = c$, $t_2 = \frac{1-a}{a}c$;

(6) $x_{n+1} \geq 2\sqrt{ax_n\frac{b}{x_n}} = 2\sqrt{ab}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(7) $2\sqrt{ab} < c \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} < \sqrt{\frac{b}{1-a}} \Leftrightarrow (2a-1)^2 > 0$;

(8) $t_2 < t_1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}c < c \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$;

(9) $\frac{1-a}{a}c < 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2a\sqrt{a} > \sqrt{1-a} \Leftrightarrow (2a-1)(2a^2+a+1) > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$;

(10) $x_{n+1} \geq 2\sqrt{ab} > \frac{1-a}{a}c, \forall n \in \mathbb{N}$;

(11) $x_{n+1} - x_n = (a-1)x_n + \frac{b}{x_n} = \frac{b-(1-a)x_n^2}{x_n} = (1-a)\frac{(c+x_n)(c-x_n)}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(12) $c - x_{n+1} = c - f(x_n) = \frac{a}{x_n}(c-x_n)\left(x_n - \frac{1-a}{a}c\right), \forall n \in \mathbb{N}$;

Ţinând cont că are loc ordonarea

$$0 < \frac{1-a}{a}c < 2\sqrt{ab} < c, \tag{13}$$

deosebim cazurile:

1. Dacă $x_0 \in \left\{\frac{1-a}{a}c, c\right\}$, atunci şirul este constant începând de la un anumit rang şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

2. Dacă $x_0 \in \left(0, \frac{1-a}{a}c\right) \cup (c, \infty)$, atunci, folosind semnul funcţiei de gradul al doilea, din (10) şi (12) rezultă că $x_1 > c$ şi, prin inducţie matematică, $x_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, din (11), obţinem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător, cu limita c.

3. Dacă $x_0 \in \left(\frac{1-a}{a}c, c\right)$, din (12) rezultă că $2\sqrt{ab} \leq x_1 < c$ şi prin inducţie că $x_n < c, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, din (11), avem că $(x_n)_n$ este strict crescător, deci convergent la c.

b) În cazul $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ vom studia subşirurile $(x_{2n})_n$ şi $(x_{2n+1})_n$. Avem:

(14) $c < \frac{1-a}{a}c \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;

(15) ecuaţia $f(x) = \frac{1-a}{a}c$ are rădăcinile $z_1 = \frac{\sqrt{b}}{2a^2}(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-4a^3})$ şi $z_2 = \frac{\sqrt{b}}{2a^2}(\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a-4a^3})$;

(16) $z_2 < 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{1-a} - \sqrt{1-a-4a^3}) < 4a^2\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{4a^3}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-4a^2}} < 4a^2\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-4a^3}$, deoarece $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1-a}$;

(17) $\frac{1-a}{a}c < z_1 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}c < \frac{\sqrt{b}}{2a^2}(\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a-4a^3}) \Leftrightarrow (2a-1)\sqrt{1-a} < \sqrt{1-a-4a^3}$, iarăşi adevărat pentru că $2a - 1 < 0$;

(18) ţinând seama de cele de mai sus, are loc următoarea ordonare:

$$0 < z_2 < 2\sqrt{ab} < c < \frac{1-a}{a}c < z_1;$$

(19) $x_{2n+2} = (f \circ f)(x_{2n}) = \frac{a(ax_{2n}^2 + b)^2 + bx_{2n}^2}{x_{2n}(ax_{2n}^2 + b)}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(20) $x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{a((ax_{2n}^2 + b)^2 - x_{2n}^4)}{x_{2n}(ax_{2n}^2 + b)} = a(1-a)\frac{((a+1)x_{2n}^2 + b)(c + x_{2n})(c - x_{2n})}{x_{2n}(ax_{2n}^2 + b)}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(21) $x_{2n+2} - c = f(x_{2n+1}) - c = \frac{ax_{2n+1}^2 - cx_{2n+1} + b}{x_{2n+1}} = \frac{a}{x_{2n+1}}(x_{2n+1} - c)\left(x_{2n+1} - \frac{1-a}{a}c\right)$
$= \frac{a}{x_{2n+1}}(f(x_{2n}) - c)\left(f(x_{2n}) - \frac{1-a}{a}c\right) = \frac{a}{x_{2n+1}}\, \frac{ax_{2n}^2 - cx_{2n} + b}{x_{2n}} \cdot \frac{ax_{2n}^2 - \frac{1-a}{a}cx_{2n} + b}{x_{2n}} = \frac{a^3}{x_{2n}^2 x_{2n+1}}(x_{2n} - c)\left(x_{2n} - \frac{1-a}{a}c\right)(x_{2n} - z_1)(x_{2n} - z_2)$;

(22) $x_{2n+2} - \frac{1-a}{a}c = f(x_{2n+1}) - \frac{1-a}{a}c = \frac{a}{x_{2n+1}}(x_{2n+1} - z_1)(x_{2n+1} - z_2), \forall n \in \mathbb{N}$;

(23) $z_2 < 2\sqrt{ab} < x_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(24) $x_{n+1} \leq ax_n + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (rezultă aplicând (6));

(25) $x_n \leq a^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{1-a}\right) + \frac{\sqrt{b}}{2(1-a)\sqrt{a}}, n \geq 2$ (se obţine din (24) dând valori lui n şi apoi adunând inegalităţile obţinute, după ce le înmulţim cu a).

Observând că $\frac{\sqrt{b}}{2(1-a)\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{b}}{2a^2}\sqrt{1-a} \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi că există $\forall k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a^{k-1}\left(x_1 - \frac{1}{1-a}\right) < \frac{\sqrt{b}}{2a^2}\sqrt{1-a-4a^3}$, obţinem prin adunare că

(26) $x_n < z_1, \forall n \geq k$.

Din (22), (23) şi (26) avem că $x_{2n+2} < \frac{1-a}{a}c$, $\forall n$ astfel încât $2n+1 > k$.

Din (21) deducem prin inducţie că termenii subşirului $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, începând de la un anumit rang, se află de aceeaşi parte a lui c şi apoi, din (20), avem că subşirul $(x_{2n})_n$ este monoton de la un anumit rang. În consecinţă, subşirul $(x_{2n})_n$ este convergent şi are limita c.

Se arată la fel că subşirul $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi cu aceeaşi limită c.

Dacă $x_0 \in \{z_1, \frac{1-a}{a}c, c, z_2\}$ sau există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x_k \in \left\{\frac{1-a}{a}c, c, z_2\right\}$, atunci şirul este constant, egal cu c începând de la un anumit rang.

c) Dacă $a = 1$ atunci şirul este strict crescător, deci are limită. Presupunând că limita sa este finită se ajunge uşor la contradicţie şi în consecinţă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

Apoi, aplicând lema Stolz-Cesàro avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b\left(\frac{x_n}{x_{n+1}+1}\right) = 2b$ şi, în concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2b}$.

d) Dacă $a > 1$, atunci $x_{n+1} - x_n = (a-1)x_n + \frac{b}{x_n} > 0$, adică şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător, deci are limită. Dacă, prin reducere la absurd, presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, atunci se ajunge la o contradicţie. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Fie acum $y_n = \frac{x_n}{\alpha^n}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a}{\alpha}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ pentru $a > \alpha$, respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru $a < \alpha$. Pentru $\alpha = a$, prin inducţie matematică se arată că $\frac{x_n}{a^n} = x_0 + \frac{b}{ax_0} + \frac{b}{a^2x_1} + \frac{b}{a^3x_2} + \ldots + \frac{b}{a^nx_{n-1}} = x_0 + \frac{b}{a}z_n$, unde $z_n = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{ax_1} + \frac{1}{a^2x_2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}x_{n-1}}$. Dar, $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{a^nx_n} > z_n$, adică $(z_n)_n$ este strict crescător. Ţinând cont că $x_n > 2\sqrt{ab}$, avem şi $z_n < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{2(a-1)\sqrt{ab}}$, adică $(z_n)_n$ este monoton şi mărginit, deci convergent, cu o limită $l \in \mathbb{R}$; deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{a^n} = x_0 + \frac{b}{a}l$, unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Observaţia 3. Avem $a^{n-1}x_{n-1} = a^nx_{n-2} + \frac{a^{n-1}b}{x_{n-2}} > a^nx_{n-2} \Rightarrow \frac{1}{a^{n-1}x_{n-1}} < \frac{1}{a^nx_{n-2}}$ şi apoi adunând aceste inegalităţi membru cu membru găsim că $z_n < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{ax_1} + \frac{1}{a^2x_2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-2}x_{n-2}}\right) = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{a^2}z_{n-1}$. Trecând la limită, avem: $l < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{a^2}l$ sau $l < \frac{a^2}{(a^2-1)x_0}$ şi apoi $\frac{1}{x_0} < l < \frac{a^2}{(a^2-1)x_0}$.