Ariile unor triunghiuri asociate cercurilor mixtliniare

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. In this Note, the formulas for the areas of four triangles associated with the mixtilinear inscribed and exinscribed circles of a given triangle are established.

Keywords: mixtilinear incircles, mixtilinear excircles.

MSC 2010: 51M04.

Fie ABC un triunghi oarecare. Vom nota, în mod obişnuit, cu $\mathcal{I}(I,r)$ şi $\mathcal{O}(O,R)$ cercurile înscris şi circumscris triunghiului şi cu $\mathcal{I}_a(I_a,r_a)$, $\mathcal{I}_b(I_b,r_b)$, $\mathcal{I}_c(I_c,r_c)$ cercurile exînscrise lui.

În geometria triunghiului sunt introduse şi studiate aşa-numitele *cercuri mixtliniare*: trei cercuri mixtliniare *înscrise* – ce corespund cercului înscris – şi trei cercuri mixtliniare *exînscrise* - ce corespund celor exînscrise. Notăm cu $\mathcal{I}_1(I_1,r_1)$ cercul definit ca tangent laturilor AB şi AC ale triunghiului şi tangent interior cercului circumscris, I_1 fiind centrul său şi r_1-raza sa. De asemenea, notăm cu $\mathcal{J}_1(J_1,\rho_1)$ cercul definit ca tangent laturilor AB şi AC şi tangent exterior cercului circumscris, J_1 fiind centrul său şi ρ_1 raza sa. Analog se introduc cercurile mixtliniare înscrise $\mathcal{I}_2(I_2,r_2)$, $\mathcal{I}_3(I_3,r_3)$ şi cele exînscrise $\mathcal{J}_2(I_2,\rho_2)$, $\mathcal{J}_3(J_3,\rho_3)$. Pentru punctele de tangenţă a cercului circumscris cu cercurile mixtliniare vom folosi notaţiile: $\{U_k\}=\mathcal{O}(O,R)\cap\mathcal{I}_k(I_k,r_k)$, $\{V_k\}=\mathcal{O}(O,R)\cap\mathcal{J}_k(I_k,\rho_k)$, $k=1,2,3$.

În lucrările [**1**], [**3**], [**4**], cât şi în multe altele, pot fi găsite proprietăţi remarcabile ale cercurilor mixtliniare.

Scopul acestei Note este calculul ariilor triunghiurilor $I_1I_2I_3$, $J_1J_2J_3$, $U_1U_2U_3$ şi $V_1V_2V_3$ în funcţie de elementele p,R,r ale triunghiului ABC dat.

Amintim cu acest prilej formulele ([**2**], de exemplu):

$$S_{DEF}=S_{D'E'F'}=\frac{pr^2}{2R}=\frac{r}{2R}\cdot S \tag{1}$$

(unde S este aria triunghiului ABC, D,E,F sunt punctele de tangenţă a laturilor BC, CA şi AB cu cercul înscris, iar D',E',F' sunt punctele de tangenţă a acestor laturi cu cercurile exînscrise),

$$S_{I_aI_bI_c}=4pR=\frac{4R}{r}\cdot S. \tag{2}$$

[1] Prof.dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi; *t_birsan@yahoo.com*

Vom utiliza mai jos următoarele formule pentru razele cercurilor mixtliniare ([**1**], [**3**], [**4**]):

$$r_1 = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{rbc}{p(p-a)} \quad \text{(şi analoagele)}, \tag{3}$$

$$\rho_1 = \frac{r_a}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{rbc}{(p-a)^2} \quad \text{(şi analoagele)}. \tag{4}$$

De asemenea, vom folosi în mod curent identităţile:
(5) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$,
(6) $abc = 4RS = 4pRr$,
(7) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$,
(8) $a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$,
(9) $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = 4r(4R - r)$,
(10) $ab - (p-c)^2 = bc - (p-a)^2 = ca - (p-b)^2 = r(4R + r)$,
(11) $a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 = 2pr(2R - r)$,
(12) $(4p^2-3ap-4bc)(4p^2-3bp-4ca)(4p^2-3cp-4ab) = 4p^2r[p^2(R-r)-r(4R-3r)^2]$;
ultimele patru se deduc din precedentele prin calcule simple.

Tot din pregătirile necesare face parte şi următoarea

Lemă. *Pentru lungimile segmentelor* II_k, IJ_k $(k = 1, 2, 3)$, *avem*:

$$II_1 = \frac{r \sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} \quad \text{etc.}, \tag{13}$$

$$IJ_1 = (4R + r)\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} \quad \text{etc.} \tag{14}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$II_1 = AI_1 - AI = \frac{r_1}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \overset{(3)}{=} \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) = \frac{r \sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}};$$

$$IJ_1 = AJ_1 - AI = \frac{\rho_1}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \overset{(4)}{=} \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \left(\frac{bc}{(p-a)^2} - 1 \right) \overset{(10)}{=}$$

$$= \frac{r^2(4R + r)}{(p-a)^2 \sin \frac{A}{2}} = (4R + r)\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Propoziţia 1. *Triunghiurile* $I_1I_2I_3$ *şi* $J_1J_2J_3$ *sunt omotetice; anume,* $I_1I_2I_3$ *se obţine din* $J_1J_2J_3$ *prin omotetia de centru* I *şi raport* $\frac{4R+r}{r}$.

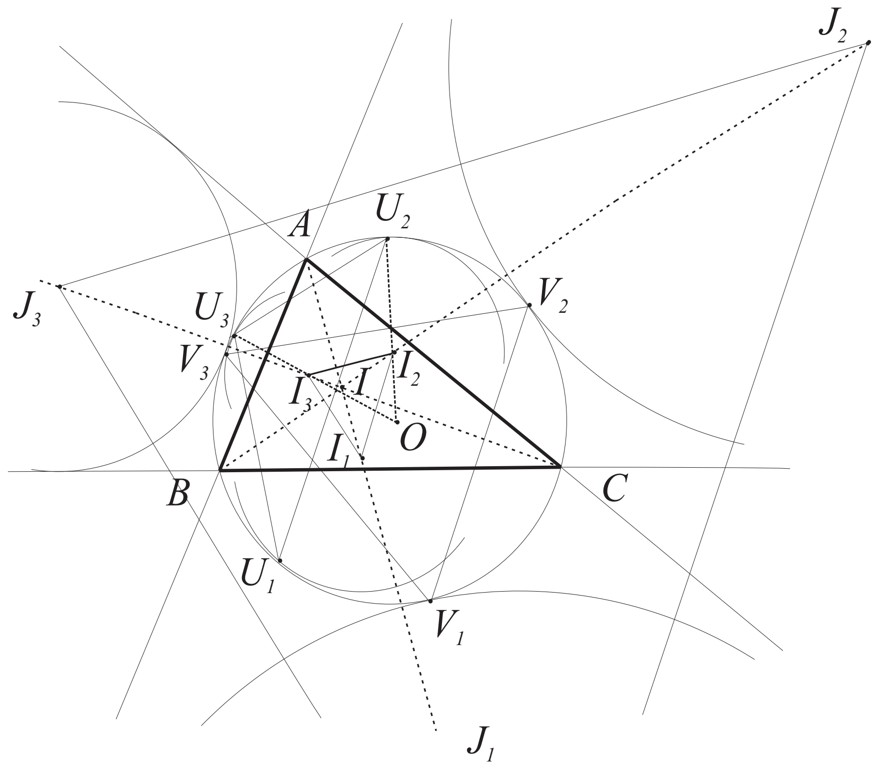
Demonstraţie. Din relaţiile (13) şi (14) se obţine că

$$\frac{IJ_1}{II_1} = \frac{IJ_2}{II_2} = \frac{IJ_3}{II_3} = \frac{4R + r}{r}.$$

Propoziţia 2. *Ariile triunghiurilor* $I_1I_2I_3$ *şi* $J_1J_2J_3$ *sunt date de formulele:*

$$S_{I_1I_2I_3} = \frac{r^2(2R-r)}{p} = \frac{r(2R-r)}{p^2} \cdot S, \tag{15}$$

$$S_{J_1J_2J_3} = \frac{(4R+r)^2(2R-r)}{p} = \frac{(4R+r)^2(2R-r)}{p^2 r} \cdot S. \tag{16}$$



Demonstraţie. Avem:

$$S_{I_1I_2I_3} = S_{II_2I_3} + S_{II_3I_1} + S_{II_1I_2} = \frac{1}{2}\sum II_2 \cdot II_3 \sin(\widehat{I_2II_3}).$$

Ţinând seama de (13) şi faptul că $\sin(\widehat{I_2II_3}) = \sin(\widehat{BIC}) = \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$, obţinem:

$$S_{I_1I_2I_3} = \frac{r^2}{2}\sum \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{r^2}{2p^2}\sum a(p-a)^2 \overset{(11)}{=} \frac{r^2(2R-r)}{p},$$

de unde rezultă că (15) are loc.

Pentru a stabili formula (16), putem proceda în mod similar sau, mai simplu, putem utiliza Propoziţia 1. Într-adevăr, triunghiurile $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ fiind asemenea, de raport $\dfrac{4R+r}{r}$, avem:

$$S_{J_1J_2J_3} = S_{I_1I_2I_3}\left(\frac{4R+r}{r}\right)^2 \overset{(15)}{=} \frac{(4R+r)^2(2R-r)}{p}.$$

Corolar. *Relativ la arile triunghiurilor $I_1I_2I_3$ şi $J_1J_2J_3$ au loc inegalităţile următoare:*

$$81 \leq \frac{S_{J_1J_2J_3}}{S_{I_1I_2I_3}} \leq 81\left(\frac{R}{2r}\right)^2, \tag{17}$$

$$\frac{16\sqrt{3}}{9}(4R^2-r^2) \leq S_{J_1J_2J_3} - S_{I_1I_2I_3} \leq \frac{16\sqrt{3}}{9}(4R^2-r^2)\cdot\frac{R}{2r}. \tag{18}$$

Avem egalitate într-un loc (şi, ca urmare, peste tot) dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Demonstraţie. Ţinând seama de egalităţile (15) şi (16) avem:

$$\frac{S_{J_1J_2J_3}}{S_{I_1I_2I_3}} = \left(\frac{4R+r}{r}\right)^2.$$

Cu inegalitatea $R \geq 2r$, deducem că $9r \leq 4R + r \leq 9\frac{R}{2}$ şi, deci, au loc relaţiile (17).

Pentru a dovedi (18), observăm mai întâi că

$$S_{J_1J_2J_3} - S_{I_1I_2I_3} = \frac{2R-r}{p}[(4R+r)^2 - r^2] = \frac{8R}{p}(4R^2-r^2).$$

Cum din faptul că $3\sqrt{3}r \leq p \leq \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\cdot\dfrac{R}{2r}$, combinând, obţinem inegalităţile dorite.

Afirmaţia privind condiţia de egalitate este evidentă.

Cum din faptul că $3\sqrt{3}r \leq p \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$ deducem imediat că $\dfrac{16\sqrt{3}}{9} \leq \dfrac{8R}{p} \leq \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\cdot\dfrac{R}{2r}$, combinând, obţinem inegalităţile dorite.

Observaţie. Din (15) şi inegalitatea $p \geq 3\sqrt{3}r$, rezultă că

$$S_{I_1I_2I_3} \leq \frac{r}{3\sqrt{3}}(2R-r) < r\cdot\frac{2R}{3\sqrt{3}}.$$

Dacă vârful C al triunghiului ABC se apropie de B, atunci r tinde la zero (conform cu $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$) şi inegalitatea obţinută arată că triunghiul $I_1I_2I_3$ poate avea arie oricât de mică.

Pe de altă parte, cu o nouă majorare, avem că

$$S_{I_1I_2I_3} < r\cdot\frac{2R}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2}\cdot\frac{2R}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}R^2;$$

ca urmare, $S_{I_1I_2I_3} \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}R^2\right)$.

Scrisă în forma $S_{I_1I_2I_3} < \frac{4}{27} \cdot \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, inegalitatea obţinută arată că $S_{I_1I_2I_3}$ este mai mică decât $\frac{4}{27}$ din aria triunghiului echilateral înscris în cercul de rază R.

Propoziţia 3. *Ariile triunghiurilor $U_1U_2U_3$ şi $V_1V_2V_3$ sunt date de formulele:*

$$S_{U_1U_2U_3} = \frac{pRr^3}{p^2(R-r) - r(4R-3r)^2}, \tag{19}$$

$$S_{V_1V_2V_3} = \frac{pR(r+4R)^3}{9p^2(r+R) + (r+4R)^3}. \tag{20}$$

Demonstraţie. Pentru calculul ariei triunghiului contactelor cercurilor mixliniare înscrise cu cercul circumscris triunghiului ABC, utilizăm formula

$$S_{U_1U_2U_3} = \frac{U_1U_2 \cdot U_2U_3 \cdot U_3U_1}{4R}, \tag{21}$$

ceea ce impune calculul lungimilor segmentelor U_1U_2, U_2U_3, U_3U_1. Cu teorema cosinusului aplicată succesiv la triunghiurile OU_2U_3, OI_2I_3 şi II_2I_3, avem:

$$U_2U_3^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\widehat{U_2OU_3}) = 2R^2\left(1 - \frac{OI_2^2 + OI_3^2 - I_2I_3^2}{2OI_2 \cdot OI_3}\right) =$$

$$= R^2\frac{I_2I_3^2 - (OI_2 - OI_3)^2}{OI_2 \cdot OI_3} = R^2\frac{(II_2^2 + II_3^2 + 2II_2 \cdot II_3 \sin\frac{A}{2}) - (OI_2 - OI_3)^2}{OI_2 \cdot OI_3}.$$

Ţinând seama de formulele (13) şi (3), avem:

$$II_2 = \frac{r\sin\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)};$$

$$II_3 = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)};$$

$$OI_2 = R - r_2 = R - \frac{r}{\cos^2\frac{B}{2}} = R\left(1 - \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}\right) = R\frac{4p^2 - 3bp - 4ac}{bp};$$

$$OI_3 = R\frac{4p^2 - 3cp - 4ab}{cp};$$

$$OI_3 - OI_2 = (R - r_3) - (R - r_2) = r_2 - r_3 \overset{(3)}{=} r\left(\frac{ac}{p(p-b)} - \frac{ab}{p(p-c)}\right) =$$

$$= \frac{ra(b-c)(p-a)}{p(p-b)(p-c)}.$$

Prin înlocuire şi după calcule de rutină, vom obţine:

$$U_2U_3^2 = \frac{a(p-a)^2 \cdot 4RS}{(4p^2 - 3bp - 4ca)(4p^2 - 3cp - 4ab)}. \tag{22}$$

Utilizând această formulă şi analoagele ei, din (21) se obţine că

$$S_{U_1U_2U_3} = \frac{4RS^4}{p} \cdot \frac{1}{(4p^2 - 3ap - 4bc)(4p^2 - 3bp - 4ca)(4p^2 - 3cp - 4ab)}. \tag{23}$$

În sfârşit, (23) şi (12) conduc la forma finală pentru aria triunghiului $U_1U_2U_3$:

$$S_{U_1U_2U_3} = \frac{pRr^3}{p^2(R-r) - r(4R-3r)^2} = \frac{Rr^2}{p^2(R-r) - r(4R-3r)} \cdot S. \tag{24}$$

Se procedează în mod asemănător pentru a stabili formula (20).

Corolar. *În orice triunghi avem că*

$$S_{V_1V_2V_3} \geq S_{U_1U_2U_3},$$

egalitatea acestor arii având loc dacă şi numai dacă triunghiul dat este echilateral.

Demonstraţie. În conformitate cu Propoziţia 3 avem de arătat că

$$\frac{(4R+r)^3}{9p^2(R+r) + (4R+r)^3} \geq \frac{r^3}{p^2(R-r) - r(4R-3r)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2[(4R+r)^3(R-r) - 9r^3(R+r)] \geq r(4R+r)^3[r^2 + (4R-3r)^2].$$

Se constată uşor că prima paranteză pătrată este strict pozitivă. Ţinând seama de faptul că $p^2 \geq r(16R - 5r)$ (care revine la $p^2 + 5r^2 - 16Rr = 9GI^2 \geq 0$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral), este suficient să arătăm că

$$(16R - 5r)[(4R+r)^3(R-r) - 9r^3(R+r)] \geq (4R+r)^3[r^2 + (4R-3r)^2].$$

Această inegalitate fiind omogenă în R, r, punem $R = tr$ (evident, $t \geq 2$) şi vom avea de arătat că

$$(16t - 5)[(4t+1)^3(t-1) - 9(t+1)] \geq (4t+1)^3[1 + (4t-3)^2]$$

sau, după calcule,

$$4(t-2)(48t^3 + 52t^2 + 17t - 5) \geq 0 \Leftrightarrow t - 2 \geq 0,$$

a doua paranteză fiind strict pozitivă pentru $t \geq 2$. Partea de egaliate se verfică uşor.

Observaţie. Din cele arătate mai sus, rezultă că, exceptând cazul în care triunghiul dat este echilateral, ariile triunghiurilor de contact al cercului circumscris cu cercurile mixtliniare înscrise şi cu cele exînscrise sunt diferite, spre deosebire de cazul ,,clasic", în care avem $S_{DEF} = S_{D'E'F'}$. Această diferenţă, cât şi altele, se explică prin prezenţa cercului circumscris triunghiului dat în definiţiile cercurilor mixtliniare.

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *A Mixtilinear Adventure*, Crux Math., 9 (1983), 2-7.
2. **Gh. Moraru** – *Consideraţii asupra ariilor unor triunghiuri remarcabile,* G.M (B) – 8/1981, 298-302.
3. **K.L. Nguyen, J.C. Salazar** – *On Mixtlinear Incircles and Excircles*, Forum Geom., 6 (2006), 1–16.
4. **P. Yiu** – *Mixtilinear Incircles*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), n. 10, 952-955.