Generalizarea problemei VIII. 169 din Recreaţii Matematice, nr. 2/2013

Dumitru M. BĂTINEŢU-GIURGIU [1]**,** ***Neculai STANCIU*** [2]**,** ***Titu ZVONARU*** [3]

Abstract. The purpose of this note is to establish a generalization of Nesbitt inequality.
Keywords: Nesbitt type-inequality.

MSC 2010: 26D15.

Problema VIII. 169 din Recreaţii Matematice, propusă de **Marian Cucoaneş**, are următorul enunţ:

Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$*, demonstraţi inegalitatea*:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}. \tag{1}$$

Soluţie. Notăm $X_{3,2} = a^2+b^2+c^2$, $X_{3,1} = a+b+c$, şi atunci inegalitatea (1) se scrie:

$$\frac{a}{X_{3,2}-a^2}+\frac{b}{X_{3,2}-b^2}+\frac{c}{X_{3,2}-c^2} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{X_{3,1}}{X_{3,2}}. \tag{2}$$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $a \geq b \geq c$. Rezultă că $\dfrac{1}{X_{3,2}-a^2} \geq \dfrac{1}{X_{3,2}-b^2} \geq \dfrac{1}{X_{3,2}-c^2}$. Conform inegalităţii lui Cebâşev, avem:

$$W = \sum_{ciclic} \frac{a}{X_{3,2}-a^2} \geq \frac{1}{3}\cdot X_{3,1}\cdot \sum_{ciclic}\frac{1}{X_{3,2}-a^2},$$

de unde, conform inegalităţii lui Harald Bergström, deducem că

$$W \geq \frac{1}{3}X_{3,1}\cdot\frac{9}{\sum_{ciclic}(X_{3,2}-a^2)} = 3\cdot X_{3,1}\cdot\frac{1}{2\cdot X_{3,2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{X_{3,1}}{X_{3,2}},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Soluţia prezentată mai sus ne sugerează o generalizare imediată, obţinută cu aceleaşi mijloace.

Generalizare a problemei VIII. 169. *Dacă* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$*,* $m, p \in \mathbb{R}_+^*$*,* $x_k \in \mathbb{R}_+^*$*,* $\forall k = \overline{1,n}$*, şi dacă notăm:* $X_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^m$*,* $X_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p$*, atunci*:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^m}{X_{n,p}-x_k^p} \geq \frac{n}{n-1}\cdot\frac{X_{n,m}}{X_{n,p}}. \tag{3}$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional ,,Matei Basarab", Bucureşti

[2]Profesor, Şcoala Generală ,,George Emil Palade", Buzău; email: *stanciuneculai@yahoo.com*

[3]email: *tzvonaru@yahoo.com*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ şi, prin urmare, avem: $\dfrac{1}{X_{n,p} - x_1^p} \geq \dfrac{1}{X_{n,p} - x_2^p} \geq \ldots \geq \dfrac{1}{X_{n,p} - x_n^p}$. Aplicând inegalitatea lui Cebâşev pentru

$$x_1^m \geq x_2^m \ldots \geq x_n^m \quad \text{şi} \quad \frac{1}{X_{n,p} - x_1^p} \geq \frac{1}{X_{n,p} - x_2^p} \geq \ldots \geq \frac{1}{X_{n,p} - x_n^p},$$

vom obţine:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^m}{X_{n,p} - x_k^p} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^m \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_{n,p} - x_k^p} \right). \tag{4}$$

Aplicând inegalitatea lui Harald Bergström, din (4) rezultă:

$$V \geq \frac{1}{n} X_{n,m} \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} (X_{n,p} - x_k^p)} = \frac{n \cdot X_{n,m}}{(n-1) \cdot X_{n,p}},$$

ceea ce era de demonstrat.

Observaţii. 1) Dacă $m = p \in \mathbb{R}_+^*$, atunci inegalitatea (3) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^m}{X_{n,m} - x_k^m} \geq \frac{n}{n-1}, \quad \forall m \in \mathbb{R}_+^*. \tag{5}$$

2) Dacă în (5) luăm $m = 1$, obţinem inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X_{m,1} - x_k} \geq \frac{n}{n-1}, \tag{N}$$

adică inegalitatea lui Nesbitt pentru n variabile.

3) Dacă în (3) luăm $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, atunci obţinem inegalitatea

$$\frac{a^m}{b^p + c^p} + \frac{b^m}{c^p + a^p} + \frac{c^m}{a^p + b^p} \geq \frac{3(a^m + b^m + c^m)}{2(a^p + b^p + c^p)},$$

de unde pentru $m = p = 1$ obţinem inegalitatea clasică a lui Nesbitt, adică

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

iar pentru $m = 1$, $p = 2$ obţinem inegalitatea din problema VIII. 169.

Propunem cititorului să demonstreze, în aceeaşi manieră, generalizarea următoare a Problemei VIII. 169:

Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b, c, d, m, p \in \mathbb{R}_+^*$, $x_k \in \mathbb{R}_+^*$, $k \in \overline{1,n}$, $X_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^m$, $X_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p$, astfel încât $c \cdot X_{n,p} > d \cdot \max\limits_{1 \leq k \leq n} x_k^p$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a \cdot X_{n,m} + b \cdot x_k^m}{c \cdot X_{n,p} - d \cdot x_k^p} \geq \frac{n(an+b)}{cn-d} \cdot \frac{X_{n,m}}{X_{n,p}}. \tag{6}$$