Observaţii asupra cercurilor semiînscrise

Neculai ROMAN [1]

Abstract. In this Note, a couple of particular positions for the A-mixtilinear circle associated to a triangle are considered, and the possible conditions for these positions to occur are established.

Keywords: incenter, circumcenter, mixtilinear center.

MSC 2010: 51M04.

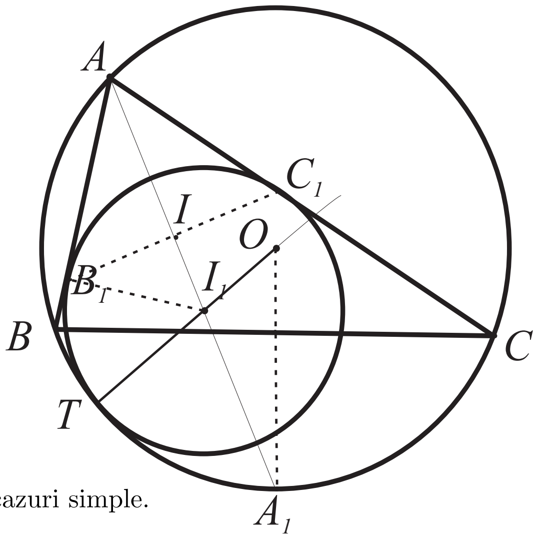
1. Fie ABC un triunghi oarecare şi O, I centrele cercurilor circumscris şi înscris lui. Vom nota în mod obişnuit razele acestor cercuri cu R şi r.

Un cerc tangent dreptelor AB şi AC şi tangent interior cercului circumscris se numeşte A-*semiînscris* (sau A-*mixtiliniar înscris*) triunghiului ABC. Analog se introduc cercurile B-semiînscris şi C-semiînscris.

În această Notă ne propunem să vedem în ce condiţii aceste cercuri au anumite poziţii particulare. Ne vom referi numai la cercurile A-semiînscrise, cărora le vom spune, pe scurt, semiînscrise. Vom nota cu $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ cercul semiînscris având centrul I_1 şi raza r_1. Punctele de tangenţă cu AB şi AC vor fi notate cu B_1, respectiv C_1, iar punctul de tangenţă cu cercul circumscris cu T. Vom mai nota cu A_1 mijlocul arcului $\overparen{BC}$ ce nu conţine vârful A. Evident, punctele I, I_1 şi A_1 se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ şi avem limitările: $r < r_1 < R$ şi $AI < AI_1 < AA_1$.

Cercurile semiînscrise au fost studiate în lucrările [**1**], [**2**], [**3**], [**4**] ş.a. Amintim câteva proprietăţi ale cercului semiînscris $\mathcal{C}(I_1, r_1)$:

- $r_1 = \dfrac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}$ (formula fundamentală);
- $AI_1 = \dfrac{r_1}{\sin \frac{A}{2}} = \dfrac{r}{\sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}$;
- I este mijlocul coardei B_1C_1 a cercului $\mathcal{C}(I_1, r_1)$.
- punctele O, I_1, T sunt coliniare.



Avem în vedere particularităţi ale cercului semiînscris $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ de tipul: I_1 are o poziţie anumită pe bisectoare, cercul $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ trece printr-un punct important al triunghiului ABC, tangenta în T are o poziţie anumită faţă de laturile triunghiului, punctele de contact B_1, C_1, T au poziţii particulare ş.a. Vom examina doar câteva cazuri simple.

[1] Profesor, Şcoala generală ,,Vasile Alecsandri", Mirceşti (Iaşi)

2. $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ trece prin A_1. Evident, în acest caz A_1 este punctul de tangenţă a cercului $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ cu cercul circumscris. Ca urmare, punctele A_1, I_1 şi O sunt coliniare. Din faptul că O se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

3. $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ trece prin O. Condiţia se scrie $OI_1 = r_1$ şi se traduce prin $R - r_1 = r_1$ (căci O, I_1, T sunt coliniare). Ca urmare, $R = 2r_1$ sau

$$R = \frac{2r}{\cos^2 \frac{A}{2}}. \tag{$*$}$$

Propoziţia 1. *Dacă $O \in \mathcal{C}(I_1, r_1)$, atunci*

(i) $8r = a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad 8r^2 = a(p-a)$*;*

(ii) $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{a}{8(p-a)}, \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a}{8(p-a)+a}$*;*

(iii) $\cos A = \frac{8(p-a)-a}{8(p-a)+a}$*;*

(iv) $R = \frac{2bc}{p} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Demonstraţie. (i) Cu $2R = \frac{a}{\sin A}$ se elimină R din relaţia $(*)$ şi se obţine prima formulă. A doua rezultă din prima, prin înmulţirea sa cu relaţia cunoscută $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

(ii) Eliminăm r din prima relaţie (i) utilizând faptul că $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ etc.

(iii) Se ţine seama de formula $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$.

(iv) Avem: $R = \frac{2r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 2(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \frac{bc}{p(p-a)} = \frac{2bc}{p} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Observaţie. Condiţia $O \in \mathcal{C}(I_1, r_1)$, echivalentă cu $r_1 = \frac{R}{2}$, poate fi privită ca fiind condiţia în care cercul semiînscris este egal cu cercul celor nouă puncte (Euler) sau, încă, condiţia în care O este diametral opus în $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ punctului T.

4. $\mathcal{C}(I_1, r_1)$ are centrul pe BC ($I_1 \in BC$). Adică I_1 este piciorul bisectoarei, ceea ce revine la condiţia $AI_1 = l_a$ (lungimea bisectoarei unghiului $\widehat{A}$.) Deoarece $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$, avem:

$$\frac{r}{\sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{2r}{\sin A} = \frac{2bc}{b+c} \cos^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r(b+c)}{bc \sin A} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r(b+c)}{2S} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2p}.$$

Propoziţia 2. *Dacă $I_1 \in BC$, atunci au loc:*
(i) $\cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$, $\sin^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{a+b+c}$;
(ii) $\cos A = \dfrac{p-a}{p} = \dfrac{r}{r_a}$ *(r_a-raza cercului A-exînscris).*

Cu formulele $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ şi $r = (p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ şi ţinând seama de propoziţia precedentă, obţinem:

Propoziţia 3. *Dacă I_1 este piciorul bisectoarei, au loc formulele:*

(i) $R^2 = \dfrac{1}{4}\dfrac{a}{b+c}p^2$, $r^2 = \dfrac{a}{b+c}(p-a)^2$;

(ii) $\dfrac{r}{R} = 2\cos A$, $OI^2 = R^2(1 - 4\cos A)$.

Observaţii. 1) Dacă $\triangle ABC$ are proprietatea $I_1 \in BC$, atunci el este ascuţiunghic. Într-adevăr, se constată uşor, prin calcul, că $A \geq 90°$ implică $AI_1 > l_a$.

2) În aceeaşi condiţie şi notând $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{a}{b+c}}$, avem:

$$\cos A = \frac{p-a}{p} = \frac{-a+b+c}{a+b+c} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \cos\varphi,$$

deci $A = \varphi = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}$. Observăm că raportul $\dfrac{a}{b+c}$ are un rol important în cazul considerat.

Bibliografie

1. **L. Bankoff** – *A Mixtilinear Adventure*, Crux Math., 9 (1983), 2-7.
2. **A. Ghirici** – *Câteva probleme asupra triunghiurilor şi cercurilor* (l. rusă), Kvant, 11 (1990), 46-48.
3. **K.L. Nguyen, J.C. Salazar** – *On Mixtilinear Incircles and Excircles*, Forum Geom., 6 (2006), 1-16.
4. **P. Yiu** – *Mixtilinear Circles*, Ann. Math. Monthly, 106 (1999), 952-955.

Recreaţii ... matematice

Cu beţisoare avem scris:

$$\mathrm{V} + \mathrm{VI} + \mathrm{VI} = \mathrm{XV}$$

a) Mutaţi un beţişor pentru a obţine egalitate; b) Mutaţi două beţişoare pentru a obţine egalitate; c) Mutaţi trei beţişoare pentru a obţine egalitate.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

(Răspunsuri la pag. 35)