Cercuri, valori medii şi diviziuni armonice

Temistocle BÎRSAN [1]

Abstract. Considering an angle and a circle tangent to its sides as a starting point, other six circles are considered and the properties of the resulting configuration are studied.

Keywords: circle, homothecy, inversion.

MSC 2010: 51M04.

1. În această Notă ne propunem să punem în evidenţă structura armonică a unei anumite configuraţii geometrice prin mijloace simple. La baza configuraţiei stau un unghi arbitrar cu vârful notat A şi un cerc $\mathcal{C}(I,r)$ tangent la laturile unghiului.

Se consideră succesiv următoarele cercuri:

- $\mathcal{C}(I_1,r_1)$ şi $\mathcal{C}(I_6,r_6)$ tangente la laturile unghiului dat, şi la cercul $\mathcal{C}(I,r)$, iar poziţia centrelor pe bisectoarea AI a unghiului să respecte ordinea $A{-}I_1{-}I{-}I_6$;
- $\mathcal{C}(I_2,r_2)$ şi $\mathcal{C}(I_5,r_5)$ tangente la laturile unghiului, cu centrele pe cercul $\mathcal{C}(I,r)$ şi respectând ordinea $A-I_2-I-I_5$;
- $\mathcal{C}(I_3,r_3)$ şi $\mathcal{C}(I_4,r_4)$ tangente la laturile unghiului, trecând prin centrul I al cercului dat şi cu ordinea $A-I_3-I-I_4$ pentru centrele lor.

Configuraţia obţinută prin această construcţie ,,ascunde" anumite legături între părţile ce o compun, legături care surprind armonia ei şi care vor fi dezvăluite în limbaj matematic mai jos.

2. Cercurile din configuraţia de mai sus vor fi numite, pe scurt, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_k$, $k=\overline{1,6}$. Vom determina întâi razele cercurilor $\mathcal{C}_i$ în funcţie de elementele de bază.

Propoziţia 1. *Razele cercurilor $\mathcal{C}_i$ sunt date în funcţie de r şi A (=măsura unghiului dat) de formulele:*

$$
\begin{aligned}
&r_1 = r\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}, &\qquad& r_4=\frac{r}{1-\sin\frac{A}{2}},\\
&r_2 = r\left(1-\sin\frac{A}{2}\right), && r_5 = r\left(1+\sin\frac{A}{2}\right),\\
&r_3=\frac{r}{1+\sin\frac{A}{2}}, && r_6 = r\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Demonstraţie. Aceste formule se stabilesc în acelaşi mod.

Pentru prima dintre ele, condiţia de tangenţă a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$ revine la $I_1I = r_1 + r$. Pornind de la relaţia evidentă

$$AI = AI_1 + I_1I,$$

[1] Prof. dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

obţinem succesiv:

$$\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}} + r_1 + r,$$
$$r = r_1 + (r_1 + r)\sin\frac{A}{2},$$
$$r_1\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) = r\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)$$

şi, de aici, prima formulă din (1). Similar se obţine a şasea formulă din (1).

Pentru a doua formulă (şi similar pentru a cincea) se pune condiţia $I_2I = r$ şi se pleacă cu egalitatea $AI = AI_2 + I_2I$.

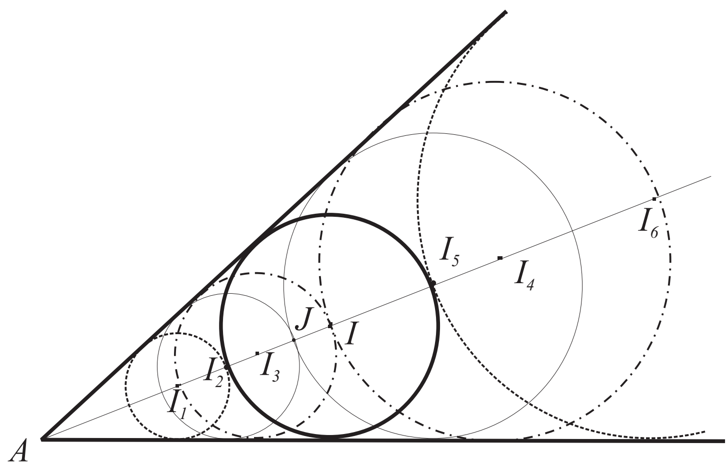
Pentru a treia, condiţia este $I_3I = r$, iar egalitatea de pornire este $AI = AI_3 + I_3I$ (similar pentru egalitatea a patra).

Observaţie. Prin consideraţii geometrice sau prin utilizarea formulelor (1), suntem conduşi la următoarea ordonare a razelor:

$$r_1 < r_2 < r_3 < r < r_5 < r_4 < r_6. \tag{2}$$

Menţionăm ,,anomalia” $r_5 < r_4$, fapt intuitiv.

O măsură a armoniei interne a configuraţiei este dată de rezultatul următor. Stabilirea acestuia se face imediat, prin calcul, pe baza egalităţilor (1).



Propoziţia 2. Au loc relaţiile:

$$2r = r_2 + r_5, \tag{3}$$
$$r^2 = r_1r_6 = r_2r_4 = r_3r_5, \tag{4}$$
$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}. \tag{5}$$

Observaţii. 1) Relaţia (3) spune că raza cercului $\mathcal{C}$ este media aritmetică a razelor cercurilor $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_5$ ce au centrele pe $\mathcal{C}$ (amintim, toate cercurile ce intervin sunt tangente la laturile unghiului). Altfel spus, cercurile C_2 şi C_5 sunt tangente.

2) Relaţiile (4) arată că raza cercului $\mathcal{C}$ este media geometrică a razelor situate pe poziţii egal depărtate de extreme în şirul (2).

3) În sfârşit, relaţia (5) afirmă că raza cercului $\mathcal{C}$ este media armonică a razelor cercurilor $\mathcal{C}_3$ şi $\mathcal{C}_4$ ce trec prin centrul său.

Este util să împărţim şirul (2) în ,,jumătăţile":

$$r_1 < r_2 < r_3 < r \quad \text{şi} \quad r < r_5 < r_4 < r_6. \tag{6}$$

Proprietăţi de tipul celor din Propoziţia 2, dar antrenând separat aceste ,,jumătăţi" sunt enunţate în propoziţia următoare. Lăsăm cititorului demonstrarea (simplă!) şi interpretarea noilor relaţii:

Propoziţia 3. *Au loc relaţiile:*

$$rr_1 = r_2r_3, \quad rr_6 = r_4r_5; \tag{7}$$

$$r^2 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6}}; \tag{8}$$

$$r^2 = \frac{r_1 + r_3}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6}}. \tag{9}$$

3. Un studiu asupra poziţiilor relative ale punctelor I şi I_k, $k = \overline{1,6}$, pe bisectoare va oferi noi informaţii despre configuraţia de cercuri.

Din faptul că

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad AI_k = \frac{r_k}{\sin\frac{A}{2}} (k = \overline{1,6}) \tag{10}$$

şi ţinând seama de formulele (1), deducem:

$$\begin{aligned} AI_1 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}, & AI_4 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \sin\frac{A}{2}}, \\ AI_2 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \left(1 - \sin\frac{A}{2}\right), & AI_5 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \left(1 + \sin\frac{A}{2}\right), \\ AI_3 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}}, & AI_6 &= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{1 + \sin\frac{A}{2}}{1 - \sin\frac{A}{2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Să facem observaţia simplă că au loc apartenenţele: $\mathcal{C} \ni I_2, I_5$; $\mathcal{C}_1 \ni I_2$; $\mathcal{C}_3 \ni I, I_1$; $\mathcal{C}_4 \ni I, I_6$; $\mathcal{C}_6 \ni I_5$; unele derivă direct din definiţia cercurilor $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_k$, iar altele utilizând (11) şi (1) (de exemplu, pentru $I_1 \in \mathcal{C}_3$ se scrie $I_1I_3 = AI_3 - AI_1$ şi cu (11) se obţine $I_1I_3 = r\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$, iar cu (1) avem $I_1I_3 = r_1$).

Fie J punctul de tangenţă a cercurilor $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_5$, adică $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_5 = \{J\}$.

Propoziţia 4. *Următoarele perechi de puncte sunt conjugate armonic:*
(i) (A, I_2) *şi* (I_1, I)*;*
(ii) (A, J) *şi* (I_2, I_5)*;*
(iii) (A, I) *şi* (I_3, I_4)*;*
(iv) (A, I_5) *şi* (I, I_6)*.*

Demonstraţie. Afirmaţiile se demonstrează la fel, pe baza formulelor (11). Vom dovedi numai pe prima. Aşadar, să arătăm că $\dfrac{AI_1}{AI} = \dfrac{I_2 I_1}{I_2 I}$. Într-adevăr, avem:

$$\frac{AI_1}{AI} = \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}},$$

$$\frac{I_2 I_1}{I_2 I} = \frac{AI_2 - AI_1}{AI - AI_2} = \left[\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) - \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}\right] : \left[1 - \left(1 - \sin\frac{A}{2}\right)\right] = \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}},$$

din care rezultă egalitatea de rapoarte dorită.

De fapt, se constată uşor că toate rapoartele ce intervin în afirmaţiile (i)-(iv) au valoarea $\alpha = \frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$. Să reţinem numai pe acelea care conţin vârful A; avem:

$$\frac{AI_1}{AI} = \frac{AI_2}{AI_5} = \frac{AI_3}{AI_4} = \frac{AI}{AI_6} = \alpha. \tag{12}$$

Fin (12) rezultă uşor următorul rezultat:

Propoziţia 5. *Omotetia* $\mathcal{H}$ *de centru* A *şi raport* α *transformă cercurile* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{C}_k$ *după cum urmează:* $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_4$ *şi* $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_6$*. Cercurile sursă şi imagine prin* $\mathcal{H}$ *sunt tangente exterior:* $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C} = \{I_2\}$, $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_5 = \{J\}$, $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4 = \{I\}$ *şi* $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_6 = \{I_5\}$*.*

Observaţie. A este punctul de omotetie directă pentru toate cuplurile de cercuri menţionate, iar centrele lor de omotetie inversă sunt tocmai aceste puncte de tangenţă. Afirmaţiile din Propoziţia 4 decurg şi din rezultatul următor: centrele de omotetie sunt conjugate armonic cu centrele cercurilor.

În conformitate cu (10), împărţind relaţiile din (4) cu factorul $\sin^2\frac{A}{2}$, vom obţine

$$AI^2 = AI_1 \cdot AI_6 = AI_2 \cdot AI_4 = AI_3 \cdot AI_5, \tag{13}$$

care permite să afirmăm:

Propoziţia 6. *Inversiunea de pol* A *şi putere* AI *transformă centrele cercurilor* $\mathcal{C}_k$ *după cum urmează:* $I_1 \to I_6$, $I_2 \to I_4$, *şi* $I_3 \to I_5$*, iar centrul* I *este punct fix.*

Observaţie. În final, constatăm că proprietăţile configuraţiei considerate sunt rezultatul interacţiunii celor două transformări introduse mai sus – omotetia şi inversiunea –, ce apar în mod firesc.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.