O proprietate a patrulaterelor convexe

Cornelia-Livia BEJAN[1]

Abstract. The main aim of this Note consists in showing that equation (1) holds.
Keywords: area, convex quadrangle, cyclic quadrangle.

MSC 2010: 51M04, 51M25.

Fie $ABCD$ un patrulater convex şi P un punct în interiorul său. Să observăm că după poziţia punctului P faţă de diagonala BD, avem: i) dacă P şi A sunt de aceeaşi parte faţă de BD, atunci patrulaterul $PDAB$ este concav iar $PBCD$ este convex; ii) dacă P şi C sunt de aceeaşi parte faţă de BD, atunci $PDAB$ este patrulater convex, iar $BPCD$ este concav; iii) dacă $P \in (BD)$, atunci aceste patrulatere degenerează în triunghiurile DAB şi, respectiv, BCD.

Să notăm aria unui patrulater $UVXY$ cu S_{UVXY}. Un rezultat cunoscut, util în ceea ce urmează, este dat de următoarea

Lemă. *Aria patrulaterului $UVXY$, convex sau concav, este dată de formula*

$$S_{UVXY} = \frac{1}{2} UX \cdot VY \cdot \sin\varphi,$$

unde $\varphi = m(\widehat{UX, VY})$ (i.e., jumătate din produsul dintre lungimile diagonalelor şi sinusul unghiului dintre ele).

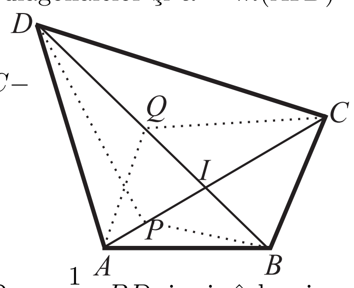
Rezultatul principal al acestei note este enunţat în

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi punctele $P \in (AC)$ şi $Q \in (BD)$. Atunci, are loc relaţia:*

$$(1) \quad PA^2 \cdot S_{PBCD} + PC^2 \cdot S_{PDAB} - QB^2 \cdot S_{QCDA} - QD^2 \cdot S_{QABC} = \\ = S \cdot (PA \cdot PC - QB \cdot QD),$$

unde S notează aria patrulaterului $ABCD$.

Demonstraţie. Notând I punctul de intersecţie a diagonalelor şi $\alpha = m(\widehat{AIB})$ şi ţinând seama de Lemă, relaţia (1) se scrie:



$$(2) \quad PA^2 \cdot PC \cdot BD + PC^2 \cdot PA \cdot BD - QB^2 \cdot QD \cdot AC - \\ - QD^2 \cdot QB \cdot AC = AC \cdot BD(PA \cdot PC - QB \cdot QD).$$

Fie $k = \dfrac{PA}{PC}$ şi $s = \dfrac{QB}{QD}$ rapoartele în care P şi Q împart diagonalele (AC), respectiv (BD). Rezultă că $PA = \dfrac{k}{k+1}AC$, $PC = \dfrac{1}{k+1}AC$, $QB = \dfrac{s}{s+1}BD$ şi $QD = \dfrac{1}{s+1}BD$ şi prin înlocuire în (2) se ajunge la o egalitate evidentă. Aşadar, relaţia (1) este stabilită.

---

[1] Prof. dr., Departamentul de Matematică şi Informatică, Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

Corolarul 1. *Fie I punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului convex $I_1I_2I_3I_4$. Atunci:*

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}IA_k^2\cdot S_k = S\cdot(IA_1\cdot IA_3 - IA_2\cdot IA_4), \tag{3}$$

unde S_k este aria triunghiului opus vârfului A_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

Corolarul 2. *Dacă patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ este inscriptibil (deci convex) şi I este punctul de intersecţie a diagonalelor, atunci*

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}IA_k^2\cdot S_k = 0. \tag{4}$$

Demonstraţie. În (3), membrul al doilea este nul, căci produsele din paranteză re[rezintă puterea punctului I faţă de cercul circumscris patrulaterului.

Corolarele pot fi extinse în spaţiu; facem acest lucru numai pentru Corolarul 1.

Propoziţia 2. *În condiţiile şi cu notaţiile din Corolarul 1, dacă M este un punct în spaţiu, atunci are loc relaţia*

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^{k-1}MA_k^2\cdot S_k = S\cdot(MA_1\cdot MA_3 - MA_2\cdot MA_4). \tag{5}$$

Demonstraţie. Vectorial, relaţia (5) se scrie:

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^{k-1}(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_k})^2\cdot S_k = S\cdot(MA_1\cdot MA_3 - MA_2\cdot MA_4)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^{k-1}(MI^2+IA_k^2-2MI\cdot IA_k\cos\widehat{MIA_k})\cdot S_k = S\cdot(MA_1\cdot MA_3-MA_3\cdot MA_4). \tag{6}$$

Scăzând din (6) relaţia (3) şi utilizând faptul că avem: $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = S$, $\cos\widehat{MIA_3} = -\cos\widehat{MIA_1}$ şi $\cos\widehat{MIA_4} = -\cos\widehat{MIA_2}$, obţinem succesiv:

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}IA_k\cos\widehat{MIA_k}\cdot S_k = 0, \tag{1}$$

$$(IA_1\cdot S_1 - IA_3\cdot S_3)\cos\widehat{MIA_1} = (IA_2\cdot S_2 - IA_4\cdot S_4)\cos\widehat{MIA_2}. \tag{7}$$

Cum $S_1 = \frac{1}{2}IA_3\cdot A_2A_4\sin\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2}IA_4\cdot A_1A_3\sin\alpha$, $S_3 = \frac{1}{2}IA_1\cdot A_2A_4\sin\alpha$, $S_4 = \frac{1}{2}IA_2\cdot A_1A_3\sin\alpha$, prin înlocuire în (7) obţinem $0 = 0$, ceea ce încheie stabilirea egalităţii (5).

Observaţie. Propoziţia 2 a fost obţinută anterior, pe altă cale, de **I. Radu** în articolul *O aplicaţie a relaţiei lui Stewart* (G.M.-10-2009, *Teorema 2*, p. 469).