O teoremă de reprezentare (II)

Marian TETIVA[1]

Abstract. In this paper some (in general well-known) results on complete sequences are exposed, with applications to Erdős-Suranyi sequences. We start from the particular problem solved in an older paper [**10**] (and from other similar problems) having the purpose to remind the readers these beautiful results.

Keywords: complete sequence, Erdös-Suranyi sequence.

MSC 2000: 11A67.

1. **Introducere: şiruri complete.** Înainte de a vedea cum se poate generaliza enunţul despre care am vorbit în prima parte a acestei lucrări [**10**], avem nevoie de un rezultat privind şirurile complete. Un şir de numere întregi pozitive se numeşte *complet* dacă orice număr întreg pozitiv se poate reprezenta ca suma unor termeni distincţi ai acestui şir. Rezultatul despre care vorbim se poate găsi în multe surse [**2**,**3**,4,**6**,**9**] şi se enunţă astfel:

Propoziţia 1. *Fie* (a_n) *un şir de numere întregi pozitive astfel încât* $a_1 = 1$ *şi* $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n + 1$ *pentru orice* $n \geq 1$*. Atunci* (a_n) *este complet.*

Mai precis, dacă notăm $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ pentru orice $n \geq 1$, atunci se poate arăta că orice număr natural din intervalul $[1, S_n]$ are o reprezentare ca sumă de termeni distincţi ai şirului (a_n) din mulţimea $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Considerând enunţul în această formă demonstraţia se face uşor prin inducţie după n; o lăsăm cititorului ca exerciţiu, cu atât mai mult cu cât ea poate fi găsită în lucrările indicate. Cititorul se poate convinge uşor că, pentru şiruri crescătoare, reciproca este, de asemenea, adevărată: dacă şirul (a_n) este complet, atunci (pentru orice $n \geq 1$) numărul $a_1 + \cdots + a_n + 1$ trebuie să poată fi exprimat ca o sumă de termeni distincţi ai şirului. Evident, aceşti termeni nu pot fi toţi dintre $a_1, \ldots, a_n$ (căci suma lor nu ar depăşi pe $a_1 + \cdots + a_n$), deci $a_1 + \cdots + a_n + 1 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}$, unde indicii $i_1, \ldots, i_m$ sunt distincţi şi cel puţin unul dintre ei este mai mare ca n. Dacă $i_j \geq n+1$, avem $a_1 + \cdots + a_n + 1 \geq a_{i_j} \geq a_{n+1}$ (aici folosim monotonia). Aşadar are loc:

Propoziţia 1′. *Fie* (a_n) *un şir crescător de numere întregi pozitive cu* $a_1 = 1$*. Atunci* (a_n) *este complet dacă şi numai dacă* $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n + 1$ *pentru orice* $n \geq 1$*.*

Se pot da multe exemple de şiruri complete: şirul numerelor naturale nenule (banal), şirul puterilor cu exponent întreg nenegativ ale lui 2 (de ce?), şirul (a_n) definit prin $a_k = k$ pentru orice $1 \leq k \leq a - 1$ şi $a_n = a$ pentru orice $n \geq a$, unde $a \geq 2$ este un număr natural fixat (iarăşi: de ce?). Vă propun cu această ocazie şi un prim exerciţiu (dacă, desigur, nu socotim întrebările deja formulate în text şi lăsate fără răspuns).

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional ,,Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Exercițiul 1. Fie $b \geq 2$ un număr natural şi şirul

$$1, \ldots, 1, b, \ldots, b, b^2, \ldots, b^2, b^3, \ldots$$

construit din blocuri de câte $b-1$ termeni egali cu puterile lui b. Folosiți acest şir şi Propoziția 1 pentru a arăta că orice număr natural poate fi scris în baza b. Arătați deci că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ astfel încât $m = c_0 + c_1 b + \cdots + c_k b^k$.

Puteți găsi o formulă unitară pentru termenul general al acestui şir?

2. O teoremă generală de reprezentare. Am văzut în prima parte a acestei lucrări că orice număr întreg impar se reprezintă într-o infinitate de feluri în forma $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2^k$ dacă alegem convenabil semnele şi numărul k. De asemenea, am amintit rezultatul lui **Erdős** şi **Surányi** [**7**] de prin 1960 conform căruia orice număr întreg admite o infinitate de reprezentări de forma $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2$. Această descendență justifică denumirea de *şir Erdős-Surányi* pe care **M.O. Drimbe** [**6**] o dă unui şir (a_n) de numere întregi pozitive având proprietatea că orice număr întreg m poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri în forma $m = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_k$ pentru anumite alegeri ale numărului k şi ale semnelor plus/minus. Rezultatul general pe care-l putem obține este următorul:

Propoziția 2. *Fie (a_n) un şir de numere întregi pozitive astfel încât $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n + 1$ pentru orice $n \geq 1$.*

a) Dacă, în plus, şirul are o infinitate de termeni impari, atunci el este un şir Erdős-Surányi.

b) Dacă numărul termenilor impari din şir este finit, atunci, de la un anumit rang N, toate sumele $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ au aceeaşi paritate. În acest caz, orice număr întreg m de aceeaşi paritate cu sumele S_n, $n \geq N$, poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri în forma $m = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_k$ pentru anumite alegeri ale numărului k şi ale semnelor plus/minus.

Demonstrație. a) Dacă şirul are o infinitate de termeni impari e uşor de văzut că există o infinitate de indici p astfel încât sumele S_p să fie numere pare şi, de asemenea, există o infinitate de indici p pentru care sumele S_p respective sunt numere impare.

Fie m un număr natural oarecare şi p suficient de mare astfel încât $S_p > m$ şi astfel încât S_p să aibă aceeaşi paritate cu m. Numărul $l = (S_p - m)/2$ este natural şi mai mic decât S_p, deci, conform ipotezei şi Propoziției 1, este suma câtorva termeni distincți ai şirului (a_n) cu indici cel mult egali cu p. Altfel spus, există $u_1, \ldots, u_p \in \{0, 1\}$ astfel încât $l = u_1 a_1 + \cdots + u_p a_p$, adică

$$\frac{1}{2}(a_1 + \cdots + a_p - m) = u_1 a_1 + \cdots + u_p a_p \Leftrightarrow m = (1 - 2u_1)a_1 + \cdots + (1 - 2u_p)a_p;$$

cum $1 - 2u_1, \ldots, 1 - 2u_p \in \{-1, 1\}$ (iar p se poate alege într-o infinitate de moduri), teorema este demonstrată. Nu trebuie mare efort pentru a justifica şi partea a doua, nu?

Punctul a) al acestei propoziții e rezultatul principal din [**6**], iar o formulare mai generală (care să ia în considerare şi situația în care şirul are doar un număr finit de termeni impari) se poate găsi în [**8**]. Scopul notei [**6**] era să arate că *şirul numerelor prime are proprietatea Erdős-Suranyi*; acesta este un rezultat clasic al lui **H.E. Richert** din 1949, iar M.O. Drimbe aplică în mod ingenios Propoziţia 2 unui şir construit cu ajutorul şirului numerelor prime pentru a-l demonstra. Pe de altă parte, **J.L. Brown, Jr.** demonstrează în [**5**] o generalizare a teoremei lui Richert care se poate folosi pentru a demonstra că şi alte şiruri au proprietatea lui Erdős-Suranyi (de exemplu pentru şirul pătratelor perfecte); vom reveni şi noi în acest cerc de idei, după un exerciţiu şi încă o observaţie (formulată tot ca exerciţiu).

Exerciţiul 2. Folosiţi Propoziţiile 1 şi 2 pentru a arăta că şirul (F_n) al lui Fibonacci definit prin $F_1 = F_2 = 1$ şi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$ este complet şi are proprietatea Erdős-Surányi.

Exerciţiul 3. Observaţi cum este construit şirul complet (a_n) care începe cu

$$2, 1, 5, 4, 14, 13, 41, 40, \ldots$$

şi arătaţi că pentru orice număr natural N, există $n > N$ şi există $m \in [1, S_n]$ natural care *nu* poate fi exprimat ca sumă de termeni distincţi ai şirului având toţi indicii cel mult egali cu n.

Acest exerciţiu arată că raţionamentul din [**2**] (preluat şi în [**1**]) făcut pentru a demonstra o formă mai generală a Propoziţiei 2 este greşit. Acest enunţ mai general (despre care nu ştiu dacă e adevărat) este următorul:

Un şir (a_n) complet şi cu o infinitate de termeni impari are proprietatea Erdős-Surányi.

Raţionamentul despre care vorbim este acelaşi pe care l-am prezentat şi noi mai sus, doar că nimic nu ne asigură, pentru un şir complet *oarecare*, că orice număr mai mic decît S_n este suma unor termeni distincţi ai şirului având indici cel mult egali cu n. Exemplul din Exerciţiul 3 arată clar asta, dar *nu* infirmă enunţul anterior (ci doar subminează demonstraţia din [**2**]). Autorul rămâne pe mai departe curios cu privire la valabilitatea acestui enunţ şi mulţumeşte anticipat oricui îi va da un indiciu despre aceasta.

Să mai remarcăm aici că Propoziţia $1'$ reprezintă o caracterizare a şirurilor complete *monotone şi cu primul termen egal cu* 1; o astfel de caracterizare pentru şiruri complete oarecare este de departe mai dificilă. Totuşi, cum se arată în [**9**], din orice şir complet putem uşor construi un şir complet care să fie şi monoton şi să aibă primul termen egal cu 1 - prin eliminarea unor termeni şi rearanjarea unui număr finit dintre cei rămaşi (cititorul este invitat să reflecteze asupra acestei chestiuni înainte de a consulta [**9**]), deci, într-un anume sens, ne putem mulţumi cu şirurile complete care au şi aceste proprietăţi.

3. Din nou despre completitudine. E uşor de văzut că şirul pătratelor numerelor naturale nenule *nu* este complet şi, deci, nu se supune condiţiei din Propoziţiile 1 sau 2. Prin urmare nu putem să arătăm că orice întreg se reprezintă în forma $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2$ folosind Propoziţia 2 (am sugerat o demonstraţie în [**10**], demonstraţie care sigur le este cunoscută cititorilor cu preocupări în domeniul matematicii de concurs). De exemplu numărul 6 nu poate fi scris ca sumă de pătrate perfecte distincte (avem, totuşi, $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$, dar nu ne interesează o asemenea exprimare). Cu toate astea se poate arăta că *orice număr mai mare ca 128 se poate reprezenta ca sumă de termeni distincţi ai şirului* (n^2).

Asta sugerează o altă definiţie, pe care mulţi autori o adoptă: un şir de numere întregi pozitive este numit complet dacă orice număr natural *suficient de mare* se poate exprima ca sumă de termeni distincţi ai şirului. Ca să nu amestecăm lucrurile, noi vom numi *cvasicomplet* un asemenea şir; aşadar, şirul (a_n) este *cvasicomplet* dacă există M cu proprietatea că, pentru orice $m > M$, există $n_1 < \cdots < n_k$ astfel încât $m = a_{n_1} + \cdots + a_{n_k}$. Cititorul poate uşor vedea că funcţionează un rezultat asemănător Propoziţiei 2 pentru şiruri cvasicomplete:

Propoziţia 2′. *Fie (a_n) un şir cvasicomplet astfel încât pentru orice $M < m \leq S_n$ există $n_1 < \cdots < n_k \leq n$ astfel încât $m = a_{n_1} + \cdots + a_{n_k}$.*

a) Dacă, în plus, şirul are o infinitate de termeni impari, atunci el este un şir Erdős-Surányi.

b) Dacă numărul termenilor impari este finit, atunci, de la un anumit rang N, toate sumele $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ au aceeaşi paritate. În acest caz, orice număr întreg m de aceeaşi paritate cu sumele S_n, $n \geq N$, poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri în forma $m = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_k$ pentru anumite alegeri ale numărului k şi ale semnelor plus/minus.

Problema care apare, în mod evident, este că avem nevoie de o condiţie uşor de verificat care să asigure că orice $M < m \leq S_n$ se exprimă ca sumă de termeni ai şirului dintre primii n (aşa cum este condiţia $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n + 1$ din Propoziţia 2). O astfel de condiţie se dă în [**5**] pentru a generaliza *teorema lui Richert* (generalizare care se aplică, de exemplu, şi şirului pătratelor) şi cu un rezultat asemănător (şi aplicarea lui) încheiem şi noi această expunere.

Propoziţia 3. *Fie (a_n) un şir de numere întregi pozitive pentru care:*

i) există p, q şi s astfel încât $p \leq q$ şi orice număr întreg din intervalul $[p, q]$ este suma unor termeni distincţi ai şirului (a_n) dintre $a_1, \ldots, a_s$.

ii) pentru aceste numere p, q, şi s avem

$$a_{s+t} \leq a_{s+1} + \cdots + a_{s+t-1} + q - p$$

pentru oricare $t \geq 1$ (dacă $t = 1$ înţelegem că $a_{s+1} \leq q - p$, adică suma din membrul drept este considerată vidă, deci egală cu zero).

Atunci şirul (a_n) este cvasicomplet, mai precis fiecare număr întreg din intervalul $[p, q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t}]$ este suma unor termeni distincţi ai şirului având indici cel mult egali cu $s + t$.

Demonstraţie. Facem, desigur, inducţie după t (cum trebuie procedat şi în demonstraţia Propoziţiei 1; iată încă un motiv pentru care aceea a fost omisă).

Cazul $t = 0$ decurge din ipoteza i). Presupunem afirmaţia adevărată pentru $t - 1$ şi o demonstrăm pentru $t \geq 1$. Pentru un număr întreg x din intervalul $[p, q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t}]$ există două posibilităţi: x poate fi din $[p, q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t-1}]$, şi în acest caz ipoteza de inducţie rezolvă problema; sau, x poate fi în intervalul $[q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t-1}, q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t}]$, deci $x - a_{s+t}$ se găseşte în $[q + a_{s+1} +$

$\cdots + a_{s+t-1} - a_{s+t}, q + a_{s+1} + \cdots + a_{s+t-1}]$. Datorită ipotezei ii), acest interval este inclus în $[p, q+a_{s+1}+\cdots+a_{s+t-1}]$, prin urmare, datorită ipotezei de inducţie, $x-a_{s+t}$ este suma unor termeni ai lui (a_n) cu indici egali cel mult cu $s+t-1$, ceea ce încheie demonstraţia.

Acum putem demonstra cvasicompletitudinea şirului pătratelor perfecte.

Exerciţiul 4. Fie $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că (a_n) îndeplineşte condiţiile Teoremei 3 cu $s = 10$, $p = 129$ şi $q = 256$ şi deduceţi astfel că (a_n) este cvasicomplet - mai precis că orice $m \in [129, 256+11^2+\cdots+(10+t)^2]$ este suma unor pătrate perfecte distincte şi cel mult egale cu $(10+t)^2$, pentru orice $t \geq 1$.

4. Din nou despre proprietatea Erdős-Surányi. În fine, putem enunţa următoarea teoremă mai generală decât Propoziţia 2, care oferă condiţii suficiente pentru ca un şir să aibă proprietatea Erdős-Surányi.

Propoziţia 4. *Fie (a_n) un şir de numere întregi pozitive care îndeplineşte condiţiile i) şi ii) din Propoziţia 3, precum şi*

iii) $(a_1 + \cdots + a_s)/2 \leq q$,

iv) şirul are o infinitate de termeni impari.

Atunci acest şir are proprietatea Erdős-Suranyi.

(Cititorul poate formula, desigur, un analog al punctului b) din Propoziţia 2.)

Demonstraţie. Se vede imediat că ipoteza iii) implică

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{2} \leq q + a_{s+1} + \cdots + a_k$$

pentru orice $k \geq s$.

Fie m un număr natural oarecare. Pentru o infinitate de numere k (suficient de mari) $a_1+\cdots+a_k$ are aceeaşi paritate ca şi m (datorită ipotezei iv)) şi, de asemenea, avem

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k - m}{2} \geq p$$

Atunci $(a_1+\cdots+a_k-m)/2$ este un întreg pozitiv cel puţin egal cu p şi mai mic decât $\dfrac{a_1 + \cdots + a_k}{2} \leq q + a_{s+1} + \cdots + a_k$; conform Propoziţiei 3, acest număr este suma unor termeni ai şirului (a_n) care au indici ce nu depăşesc pe k:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k - m}{2} = u_1 a_1 + \cdots + u_k a_k,$$

pentru anumite numere $u_1, \ldots, u_k \in \{0, 1\}$. De aici obţinem reprezentarea

$$m = (1 - 2u_1)a_1 + \cdots + (1 - 2u_k)a_k,$$

în care, desigur, $1 - 2u_1, \ldots, 1 - 2u_k \in \{-1, 1\}$. Asemenea reprezentare se poate găsi pentru o infinitate de k şi demonstraţia este încheiată.

Acum se poate dovedi şi pe această cale că şirul pătratelor perfecte are proprietatea Erdős-Suranyi.

Exerciţiul 5. Arătaţi că şirul pătratelor perfecte are proprietatea Erdős-Surányi folosind Propoziţia 4.

Desigur, este o demonstraţie nepermis de complicată faţă de cea obişnuită (pe care, cum spuneam mai sus, fără îndoială că pasionaţii concursurilor de matematică o cunosc, de exemplu din cartea lui Engel de metode şi strategii de rezolvare a unor asemenea probleme). Mai important e că am reuşit astfel să demonstrăm cvasicompletitudinea şirului pătratelor perfecte, care mai simplu nu prea se poate obţine - de altfel şi acest rezultat este unul clasic (a fost obţinut de **R. Sprague** în 1948; mai tîrziu s-a arătat că şirurile (n^t), cu $t \geq 2$, sunt cvasicomplete şi au proprietatea Erdős-Suranyi, acest fapt nebazându-se numaidecât pe cvasicompletitudine).

Să încheiem tot în această notă veselă, a problemelor propuse şi lăsate fără rezolvări.

Exerciţiul 6. Arătaţi că şirul $1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, \ldots$ format cu puterile numerelor întregi pozitive cu exponent cel puţin 2 şi aşezate în ordine crescătoare are proprietatea Erdős-Suranyi.

Şi o ghicitoare a lui Erdős (pasionaţii o cunosc):

Exerciţiul 7. Să se arate că şirul $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36, \ldots$ format cu numerele de forma $2^a \cdot 3^b$ (a, b numere naturale) este complet. Mai mult, orice număr întreg pozitiv este suma unor termeni distincţi ai şirului dintre care nici unul nu divide pe altul (cu excepţia lui 1, desigur).

Bibliografie

1. **D. Andrica, D. Văcăreţu** – *Representation Theorems And Almost Unimodal Sequences*, Studia Univ. ,,Babeş-Bolyai", Mathematica, vol. LI, nr. 4, December 2006.
2. **Cătălin Badea** – *Asupra şirurilor Erdős-Surányi,* Revista Matematică din Timişoara, nr. 1, 1987, 10-13.
3. **J. L. Brown, Jr.** – *Note on Complete Sequences of Integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 6 (Jun. - Jul., 1961), 557-560.
4. **J. L. Brown, Jr.** – *Integer Representations and Complete Sequences,* RMathematics Magazine, Vol. 49, No. 1 (Jan., 1976), 30-32.
5. **J. L. Brown, Jr.** – *Generalization of Richerts̹ Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 8 (Oct., 1976), 631-634.
6. **M. O. Drimbe** – *O problemă de reprezentare a numerelor întregi,* Gazeta Matematică, seria B, nr 10-11, Octombrie-Noiembrie 1983, 382-383.
7. **P. Erdős, J. Surányi** – *Topics in the Theory of Numbers*, Springer-Verlag, 2003, 227-228.
8. **W. Y. Lee** – *On the Representation of Integers,* Mathematics Magazine, Vol. 47, No. 3 (May, 1974), 150-152.
9. **E. Schissel** – *Characterizations of Three Types Of Completeness*, `http://www.fq.math.ca/Scanned/27-5/schissel.pdf`.
10. **M. Tetiva** – *O problemă de reprezentare,* Recreaţii Matematice, nr. 2, 2010, 123-127.