O condiţie de existentă a triunghiurilor dreptunghice de arie şi perimetru date

***Neculai STANCIU*[1], *Titu ZVONARU*[2]**

Abstract. Given a right-angled triangle with area A and perimeter P, what conditions on A and P guarantee that the triangle actually exists?

Keywords: Heronian triangle, primitive triangle, right-angled triangles, area, perimeter.

MSC 2000: 51M16, 51M71.

1. Introducere. În lucrarea [**16**] au fost prezentate rezolvările următoarelor probleme:

Problema 1 ([**3**]). *Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice de arie A şi perimetru P cu lungimile laturilor a, b, c numere naturale şi cel mai mare divizor comun al lor $(a, b, c) = 1$ astfel încât* $\dfrac{P^2}{A} \in \mathbb{N}$. (Triunghiurile ale căror laturi verifică condiţiile de mai sus se numesc *triunghiuri Heron.* Rezultate deosebite în privinţa lor a stabilit matematicianul indian **K.R.S. Sastry** în [**7**], [**8**], [**9**], [**10**] şi [**11**].)

Problema 2. *Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale care au:*
a) *aria egală cu 84 unităţi de arie;*
b) *perimetrul egal cu 24 unităţi de lungime.*

Problema 3. *Determinaţi toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale şi care au aria egală cu semiperimetrul.* (Singurul astfel de triunghi este triunghiul dreptunghic cu lungimile laturilor: 3, 4 şi 5.)

Problema 4. *Determinaţi toate triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor numere naturale şi care au aria egală cu perimetrul.* (Există două triunghiuri dreptunghice pentru care $A = P$ şi anume: triunghiul $a = 10$; $b = 6$; $c = 8$ şi triunghiul $a = 13$; $b = 12$; $c = 5$.)

Problema 5. *Arătaţi că nu există triunghiuri Heron cu lungimile laturilor numere prime.*

Problema 6. *Considerăm un triunghi dreptunghic cu perimetrul P şi aria A numere naturale. Arătaţi că ipotenuza este număr natural dacă şi numai dacă P este număr natural par şi $P|2A$.*

Problema 7. *Determinaţi toate triunghiurile care au lungimile laturilor numere prime şi pătratul ariei număr natural.*

Numim *triunghi Super-Heron* un triunghi care are lungimile laturilor numere naturale consecutive şi aria tot număr natural. Recent[3], 2007, s-a demonstrat existenţa unui număr infinit de astfel de triunghiuri.

---

[1]Profesor, Şcoala Generală ,,George Emil Palade", Buzău

[2]Comăneşti, *tzvonaru@yahoo.com*

[3]*http://www.math.twsu.edu/ richardson/heronian/heronian.html*

Problema 8. *Confirmaţi sau infirmaţi existenţă patrulaterelor inscriptibele Super-Heron.* (*Indicaţie.* Folosiţi formula ariei patruterului inscriptibil dată de matematicianul indian Brahmagupta, sec.VII d.Hr.: $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, unde a, b, c, d sunt lungimile laturilor patrulaterului, iar p este semiperimetrul acestuia.)

Probleme asemănătoare au fost propuse recent în [**14**] şi [**15**].

2. Rezultatul principal. În încheierea lucrării [**16**] s-a propus următorul

Exerciţiu. *Stabiliţi o condiţie de existenţă a triunghiurilor dreptunghice de arie A şi perimetru P.*

Scopul acestui articol este de a stabili o condiţie de existenţă a triunghiurilor dreptunghice de arie A şi perimetru P date.

Mai mulţi autori au propus probleme care aveau ca date iniţiale A şi P fără a se examina dacă triunghiul respectiv există în realitate (v. [**12**]).

Se ştie că *într-un triunghi oarecare avem*:

$$P^2 \geq 12\sqrt{3} \cdot A \Leftrightarrow A \leq \frac{\sqrt{3}}{36} P^2. \tag{1}$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Vom demonstra relaţia (1) folosind inegalitatea izoperimetrică pentru poligoane: dintre toate poligoanele de perimetru dat şi acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are aria maximă; dual, dintre toate poligoanele de arie dată şi acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are perimetrul minim. Aşadar pentru triunghiuri avem:

$$\left.\begin{array}{l} A \leq A_3 = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{4}{l^2\sqrt{3}} \\ P \geq P_3 = 3l \Leftrightarrow P^2 \geq 9l^2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{P^2}{A} \geq 12\sqrt{3} \sim 20,785.$$

Vom stabili o condiţie asemănătoare de existenţă a triunghiurilor dreptunghice pornind de la următorul

Exerciţiu. *Calculaţi lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu $A = 8$ şi $P = 13$.*

Soluţie. Este uşor de verificat că pentru $A = 8$, $P = 13$, relaţia (1) este adevărată. Prima idee ar fi să rezolvăm sistemul $\begin{cases} ab = 2A \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = P \end{cases}$, unde a, b sunt catetele triunghiului. Există însă şi o cale mai ,,frumoasă"(v. [**13**]). Dacă c este ipotenuză, avem: $P - c = a + b \Leftrightarrow P^2 - 2Pc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{a^2+b^2=c^2}{\underset{ab=2A}{=}} c^2 + 4A \Leftrightarrow P^2 - 4A = 2Pc$, adică $c = \dfrac{P^2 - 4A}{2P}$. În cazul nostru avem $c = \dfrac{137}{26}$.

Să calculăm lungimile catetelor din sistemul $\begin{cases} ab = 16 \\ a + b = \dfrac{201}{26} \end{cases}$. Obţinem ecuaţia $26x^2 - 201x + 416 = 0$ cu $x_{1,2} = \dfrac{201 \pm i\sqrt{2863}}{52}$; aşadar, triunghiul considerat nu există!

În cazul unui triunghi dreptunghic condiţia de existenţă este:

$$(*) \qquad P \geq 2(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{A} \Leftrightarrow P^2 \geq 4(3+2\sqrt{2}) \cdot A \Leftrightarrow A \leq \frac{3-2\sqrt{2}}{4} P^2.$$

Deci,

$$\frac{P^2}{A} \geq 4(3+2\sqrt{2}) \sim 23,314.$$

Într-adevăr, ca mai sus, avem:

$$P - c = a + b \Leftrightarrow P^2 - 2Pc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \underset{ab=2A}{\overset{a^2+b^2=c^2}{=}} c^2 + 4A \Leftrightarrow P^2 - 4A = 2Pc.$$

Rezultă că $c = \dfrac{P^2 - 4A}{2P}$. Din

$$a + b = P - c = P - \frac{P^2 - 4A}{2P} = \frac{P^2 + 4A}{2P} \Rightarrow b = \frac{P^2 + 4A}{2P} - a.$$

Apoi,

$$ab = 2A \Rightarrow a\left(\frac{P^2+4A}{2P} - a\right) = 2A \Rightarrow \frac{Pa^2}{2} - \left(\frac{P^2}{4} + A\right)a + AP = 0.$$

Dar, ultima ecuaţie are soluţii reale dacă

$$\Delta_a \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{P^2}{4} + A\right)^2 - 4\frac{P}{2}AP \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{P^2}{4A}\right)^2 - 6\left(\frac{P^2}{4A}\right) + 1 \geq 0.$$

Rezolvând ultima inecuaţie, obţinem:

$$P^2 \geq 4A(3+2\sqrt{2}) \text{ sau } P^2 \leq 4A(3-2\sqrt{2}),$$

echivalente cu

$$P \geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{A} \text{ sau } P \leq 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{A}.$$

Aceste ultime condiţii trebuiesc corelate şi cu condiţia $P > 2\sqrt{A}$, de existenţă a ipotenuzei. Obţinem că triunghiul dreptunghic de arie A şi perimetru P există *dacă şi numai dacă* avem:

$$P \geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{A} \Leftrightarrow A \leq \frac{P^2(3-2\sqrt{2})}{4} \Leftrightarrow \frac{A}{P^2} \leq \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{P^2}{A} \geq 4(3+2\sqrt{2}).$$

În relaţiile de mai sus avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul este dreptunghic isoscel.

Remarca 1. În 1904, **Whitworth** şi **Biddle** au arătat că există numai cinci triunghiuri Heron cu proprietatea $A = P$, şi anume, triunghiurile Heron cu laturile $(6,8,10)$, $(5,12,13)$, $(6,25,29)$, $(7,15,20)$ şi $(9,10,17)$ ([**1**]).

Remarca 2. Deşi **Goehl**, în [**2**], prezintă un algoritm general pentru determinarea tuturor triunghiurilor dreptunghice de tip Heron cu proprietatea că $A = mP(m \in \mathbb{N})$, problema este rezolvă în cazul general (pentru triunghiurile Heron oarecare) abia peste mai mult de 20 de ani de către **Lubomir Markov** ([**4**]), care, după puţin timp revine chiar cu o metodă nouă ([**5**]). O metodă diferită pentru rezolvarea problemei $A = mP$, pentru triunghiurile Heron oarecare este prezentată de către **Jizhou Li** în [**6**].

Bibliografie

1. L. Dickson – *History of the Theory of Numbers*, Vol. II, Chelsea Publish-ing Co, NY, 1992 (reprint from 1923 edition).

2. J. Goehl – *Area=k(perimeter)*, Math. Teach. 79(1985), 330-332.

3. John F. Goehl, Jr. – *Pythagorean Triangles with Square of Perimeter Equal to an Integer Multiple of Area*, Forum Geometricorum, Vol. 9 (2009), 281-282.

4. L. Markov – *Pythagorean triples and the problem $A = mP$ for triangles,* Math. Mag. 79 (2006), 114-121.

5. L. Markov – *Heronian Triangles Whose Areas are Integer Multiple of their Perimeters,* Forum Geometricorum, (2007), 129-135.

6. `http://www.mathlab.mtu.edu/~jizhoul/Site/Home_Page_files/Goehl's%20Problem.pdf`

7. K.R.S. Sastry – *Heron Problems,* Math. And Comput. Ed., 29(1995), 192-202.

8. K.R.S. Sastry – *Heron Triangles: A New Perspective*, Aust. Math. Soc. Gazette, 26 (1999), 160-168.

9. K.R.S. Sastry – *Heron Triangles*, Math. And Comput. Ed., 35 (2001), 51-60.

10. K.R.S. Sastry – *A Heron Difference*, Crux mathematicorum with Mathematical Mayhem, 27(2001), 22-26.

11. K.R.S. Sastry – *If (a, b, c) is Heron, can $(s - a, s - b, s - c)$ also be Heron?*, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 28 (2002), 23-27.

12. *Problema E:14152, Gazeta Matematică* - seria B, nr. 3/2011, 154.

13. *Problema VIII.293, Revista de Matematică din Timişoara*, nr. 4/2010, 17.

14. *Problema S:E11.170, Gazeta Matematică* - Supliment cu exerciţii, Gazeta Matematică - seria B, nr. 5/2011, 7.

15. *Problema S:E11.163, Gazeta Matematică* - Supliment cu exerciţii, Gazeta Matematică - seria B, nr. 5/2011, 7.

16. T. Zvonaru – *Triunghiuri de arie şi perimetru date;* în *Articole şi note matematice*, Vol. IV, Societatea de Ştiinţe Matematice din România - Filiala Râmnicu Sărat, Editura Rafet, 2011, 120-129.