Aplicaţii ale numerelor complexe în geometria triunghiului

Florin STĂNESCU[1]

Abstract. In this Note, the equilateral and right-angled triangles are characterized in terms of certain relations involving the complex numbers associated with their vertices.

Keywords: equilateral triangle, right-angled triangle, complex number.

MSC 2000: 51M04.

Ne propunem în cele ce urmează să găsim caracterizări ale triunghiurilor echilaterale şi ale triunghiurilor dreptunghice prin identităţi ce implică afixele vârfurilor acestora. Vom folosi pe parcurs binecunoscute relaţii metrice şi trigonometrice în triunghi (ale căror demonstraţii pot fi găsite în [**1**], precum şi unele inegalităţi uzuale în triunghi (pentru care trimitem cititorul interesat la [**2**]).

1. Preliminarii. Raportăm planul la un reper cartezian xOy şi fie ABC un triunghi înscris în cercul unitate. Notăm cu z_1, z_2, z_3 afixele vârfurilor A, B respectiv C, unde $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Ortocentrul triunghiului are afixul $h = z_1 + z_2 + z_3$, deci $AH^2 = |(z_1 + z_2 + z_3) - z_1|^2 = |z_2 + z_3|^2 = (z_2 + z_3)(\overline{z}_2 + \overline{z}_3) = |z_2|^2 + |z_3|^2 + \overline{z}_2 z_3 + z_2\overline{z}_3$, prin urmare $\overline{z}_2 z_3 + z_2\overline{z}_3 = AH^2 - 2$. Însă $AH = 2R\cos A$ (relaţia 15.6 din [**1**]) şi obţinem că $\overline{z}_2 z_3 + z_2\overline{z}_3 = 4\cos^2 A - 2$ şi, întrucât $\overline{z}_2 = \dfrac{|z_2|^2}{z_2} = \dfrac{1}{z_2}$, $\overline{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$, vom avea

$$(1)\quad \cos^2 A = \frac{(z_2 + z_3)^2}{4z_2z_3} \text{ şi analoagele} : \cos^2 B = \frac{(z_1 + z_3)^2}{4z_1z_3},\ \cos^2 C = \frac{(z_1 + z_2)^2}{4z_1z_2}.$$

Folosind faptul că $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, deducem că

$$(2)\quad \sin^2 A = -\frac{(z_2 - z_3)^2}{4z_2z_3} \text{ şi analoagele} : \sin^2 B = -\frac{(z_1 - z_3)^2}{4z_1z_3},\ \sin^2 C = -\frac{(z_1 - z_2)^2}{4z_1z_2}.$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$(3)\quad \operatorname{ctg}^2 A = -\left(\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}\right)^2,\ \operatorname{ctg}^2 B = -\left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 - z_3}\right)^2,\ \operatorname{ctg}^2 C = -\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)^2.$$

Afixul centrului Ω al cercului medial al triunghiului ABC este $\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)$, deci $A\Omega = \dfrac{1}{2}|z_1 - z_2 - z_3|$. Pe de altă parte, aplicând teorema medianei în triunghiul AOH (unde Ω este mijlocul segmentului OH), obţinem că $A\Omega^2 = \dfrac{2(AH^2 + AO^2) - OH^2}{4}$. Folosind identităţile $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$ şi $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cdot \cos B\cos C)$ (relaţiile 13.13 şi 15.10 din [**1**]), rezultă că

$$(4)\quad A\Omega^2 + B\Omega^2 + C\Omega^2 = \frac{8\cos A\cos B\cos C + 11}{4}.$$

[1] Profesor, Şcoala ,,Şerban Cioculescu", Găeşti (Dâmboviţa)

2. Propoziţie. *Fie* z_1, z_2, z_3 *numere complexe distincte de modul* 1 *şi* A, B, C *punctele de afixe* z_1, z_2*, respectiv* z_3*. Dacă este adevărată una dintre egalităţile*:

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}+\frac{(z_2+z_3)^2}{z_2z_3}+\frac{(z_3+z_1)^2}{z_3z_1}=3; \tag{5}$$

$$\frac{z_1z_2}{(z_1-z_2)^2}+\frac{z_2z_3}{(z_2-z_3)^2}+\frac{z_3z_1}{(z_3-z_1)^2}=-1; \tag{6}$$

$$\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)^2+\left(\frac{z_2+z_3}{z_2-z_3}\right)^2+\left(\frac{z_3+z_1}{z_3-z_1}\right)^2=-1; \tag{7}$$

$$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_2+z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_3+z_1}{z_3-z_1}=\frac{i}{3\sqrt{3}} \quad \text{şi } \triangle ABC \text{ ascuţiunghic}; \tag{8}$$

$$\frac{|z_2+z_3|^4}{|z_1-z_2-z_3|}+\frac{|z_3+z_1|^4}{|z_2-z_3-z_1|}+\frac{|z_1+z_2|^2}{|z_3-z_1-z_1|}=\frac{3}{2}, \tag{9}$$

atunci triunghiul ABC *este echilateral.*

Demonstraţie. Ţinând seama de (2), relaţia (5) se poate scrie sub forma $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{3}{4}$. Însă în orice triunghi are loc inegalitatea $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{3}{4}$, egalitatea fiind atinsă în cazul în care $\triangle ABC$ este echilateral (inegalitatea GU.1. din [**2**]). Rezultă că (5) atrage faptul că triunghiul este echilateral.

În cazul egalităţilor (6) şi (7) procedăm similar, ţinând seama că inegalităţile $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq 4$ şi $\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C\geq 1$, valabile în orice triunghi, devin egalităţi doar pentru triunghiul echilateral (GU.21. şi GU.50. din [**2**]).

Relaţia (8) conduce, prin ridicare la pătrat şi folosind (3), la $\operatorname{ctg}^2 A\cdot\operatorname{ctg}^2 B\cdot\operatorname{ctg}^2 C=\frac{1}{27}$, adică $\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C=3\sqrt{3}$ (am ţinut seama de faptul că $\triangle ABC$ este ascuţitunghic). Însă $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$, deci $27=(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)^2=\sum\operatorname{tg}^2 A+2\sum\operatorname{tg} A\operatorname{ctg} B\geq 3\cdot\sqrt[3]{\prod\operatorname{tg}^2 A}+2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B}=9+18=27$ şi deducem că $\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C=9$. Astfel, se atinge egalitatea în inegalitatea GU.39. din [**2**] ($\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C\geq 9$), aşadar $\triangle ABC$ este echilateral.

Observăm că (1) conduce, prin conjugare, la $\cos^2 A=\frac{(\overline{z}_2+\overline{z}_3)^2}{4\overline{z}_2\overline{z}_3}$, deci $\cos^4 A=\frac{[(z_2+z_3)(\overline{z}_2+\overline{z}_3)]^2}{16z_2\overline{z}_2\cdot z_3\overline{z}_3}=\frac{|z_2+z_3|^4}{16|z_2|^2|z_3|^2}=\frac{1}{16}|z_2+z_3|^4$; rezultă că relaţia (9) se poate rescrie sub forma $\frac{\cos^4 A}{A\Omega}+\frac{\cos^4 B}{B\Omega}+\frac{\cos^4 C}{C\Omega}=\frac{3}{16}$. Pe de altă parte, utilizând (4) obţinem că $(A\Omega+B\Omega+C\Omega)^2\leq 3(A\Omega^2+B\Omega^2+C\Omega^2)=3\cdot\frac{8\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+11}{4}\leq 3\cdot\frac{1+11}{4}=9$, deci $A\Omega+B\Omega+C\Omega\leq 3$. Inegalitatea lui Bergström arată că

$$\frac{3}{16}=\sum\frac{\cos^4 A}{A\Omega}\geq\frac{(\sum\cos^2 A)^2}{\sum A\Omega}\geq\frac{(\sum\cos^2 A)^2}{3}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16};$$

ne-am folosit şi de inegalitatea $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$, amintită deja la (5). Cum toate inegalităţile se transformă în egalităţi, rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral.

3. Propoziţie. *Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte de modul 1 şi A, B, C punctele de afixe z_1, z_2, respectiv z_3. Dacă este adevărată una dintre egalităţile:*

$$\frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_3+z_1}{z_2} = -2; \tag{10}$$

$$|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_3+z_1|^2 = 4|z_1+z_2+z_3|^2; \tag{11}$$

$$|z_1-z_2-z_3|^2 + |z_2-z_3-z_1|^2 + |z_3-z_1-z_2|^2 = 11, \tag{12}$$

atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Demonstraţie. Relaţia (10) arată că $-2 = \sum \frac{z_1+z_2}{z_3} = \sum \overline{z}_3(z_1+z_2) = \sum(\overline{z}_2 z_3 + z_2\overline{z}_3) = \sum(4\cos^2 A - 2)$, deci $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Rezultă că $1 - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1$, adică $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$ şi de aici urmează că $\triangle ABC$ este dreptunghic.

Egalitatea (11) se rescrie sub forma $4\cos^2 A + 4\cos^2 B + 4\cos^2 C = 4OH^2$, de unde $1 - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1 - 8\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, deci $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$ şi din nou obţinem că $\triangle ABC$ este dreptunghic.

Din (12) rezultă, ţinând seama de (4), că $11 = 4(A\Omega^2 + B\Omega^2 + C\Omega^2) = 11 + 8\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, prin urmare $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$, adică $\triangle ABC$ este dreptunghic.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.
2. **I.V. Maftei, P.G. Popescu** – *Inegalităţi alese în matematică,* Editura Niculescu, Bucureşti, 2005.

Recreaţii ... matematice

Nichita Stănescu

<u>*Altă matematică*</u>

Noi ştim că unu ori unu fac unu,
dar un inorog ori o pară
nu ştim cât face.
Ştim că cinci fără patru fac unu,
dar un nor fără o corabie
nu ştim cât face.
Ştim, noi ştim că opt
împărţit la opt fac unu,
dar un munte împărţit la o capră
nu ştim cât face.
Ştim că unu plus unu fac doi,
dar eu şi cu tine,
nu ştim, vai, nu ştim cât facem.

Ah, dar o plapumă
înmulţită cu un iepure
face o roşcovană, desigur,
o varză împărţită la un steag
fac un porc,
un cal fără un tramvai
face un înger,
o conopidă plus un ou,
face un astragal...

Numai tu şi cu mine
înmulţiţi şi împărţiţi
adunaţi şi scăzuţi
rămânem aceiaşi...

Pieri din mintea mea!
Revino-mi în inimă!