O demonstraţie geometrică a inegalităţii lui Blundon

Marius DRĂGAN[1]***, Mihai HAIVAS*** [2]***, I.V. MAFTEI*** [3]

Abstract. It is presented a geometrical proof of Blundon′s inequality.
Keywords: circumcenter, orthocenter, incenter, Blundon′s inequality.
MSC 2000: 51M16.

Inegalitatea lui Blundon a fost şi continuă să fie obiect de preocupare în multe lucrări de geometria triunghiului ([1], [2], [3] etc.). Ne propunem în această Notă să dăm o nouă demonstraţie acestei inegalităţi:

Propoziţie. *În orice triunghi au loc inegalităţile:*

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\le p^2\le$$
$$\le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \tag{1}$$

(*notaţiile utilizate sunt cele obişnuite*).

Vom prezenta o demonstraţie geometrică, care are în centrul ei anumite relaţii geometrice în triunghiul OHI.

Considerăm cunoscute următoarele formule pentru distanţele dintre punctele O, H şi I:

$$OI^2=R(R-2r), \tag{2}$$
$$OH^2=9R^2+8Rr+2r^2-2p^2, \tag{3}$$
$$HI^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2. \tag{4}$$

Lema 1. *În triunghiul OHI, dacă m_I notează lungimea medianei corespunzătoare laturii OH, avem relaţia*

$$m_I=\frac{1}{2}(R-2r) \qquad ([4],\ \text{p. } 123,\ \text{f. } (3)). \tag{5}$$

Demonstraţie. Cu teorema medianei şi ţinând seama de (2), (3), (4), avem:

$$4m_I^2=2(OI^2+HI^2)-OH^2\Leftrightarrow$$
$$4m_I^2=2(R^2-2Rr+4R^2+4Rr+3r^2-p^2)-(9R^2+8Rr+2r^2-2p^2)\Leftrightarrow$$
$$4m_I^2=R^2-4Rr+4r^2\Leftrightarrow$$
$$4m_I^2=(R-2r)^2\Leftrightarrow$$
$$m_I=\frac{1}{2}(R-2r).$$

[1]Profesor, Colegiul Tehnic ,,Mircea cel Bătrân”, Bucureşti
[2]Cercetător ştiinţific, Inst. Cerc. Econ. ,,Gh. Zane”, Iaşi
[3]Profesor, Colegiul Naţional ,,Sf. Sava”, Bucureşti

Lema 2. *În triunghiul OHI are loc inegalitatea:*

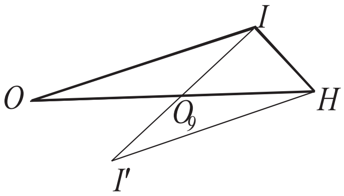
$$OI \geq 2m_I. \tag{6}$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$OI^2 - 4m_I^2 = R(R-2r) - (R-2r)^2 = 2r(R-2r) \geq 0.$$

Putem acum să trecem la

Demonstraţia Propoziţiei. Notăm cu I' simetricul punctului I în raport cu mijlocul segmentului OH (adică punctul O_9 – centrul cercului celor nouă puncte). În triunghiul HII', putem scrie (ţinem seama că $HI' = OI$):



$$OI - 2m_I \leq HI \leq OI + 2m_I,$$

echivalent cu

$$OI^2 - 4OI \cdot m_I + 4m_I^2 \leq HI^2 \leq OI^2 + 4OI \cdot m_I + 4m_I^2$$

sau, utilizând (2), (4) şi (5),

$$R(R-2r) - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} + (R-2r)^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 \leq$$
$$\leq R(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2R)} + (R-2r)^2,$$

de unde deducem că

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)},$$

adică inegalitatea lui Blundon.

Observaţie. Dacă triunghiul dat este echilateral, în care caz $R = 2r$, avem, evident, egalitate în ambii membri din (1). În [3] sunt aduse precizări în privinţa condiţiilor în care are loc egalitatea în membrul stâng din (1) şi, separat, în membrul drept.

Bibliografie

1. **W.J. Blundon** – *Problem 1935*, The Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 1122.
2. **W.J. Blundon** – *Inequalities associated with a triangle*, Canad. Math. Bull., 8 (1965), 615-626.
3. **A. Lupaş** – *Asupra unor inegalităţi geometrice*, Revista Matematică din Timişoara, nr. 1/1984, 21–23.
4. **C.P. Niculescu** – *Caracterul algebric al inegalitătii lui Blundon*, Gazeta Matematică, nr. 7-8/1999, 270-275.
5. **D. Sachelarie** – *Geometria triunghiului. Anul 2000*, Matrix Rom, Bucureşti, 2000.