Dubla inegalitate a lui Blundon revizitată

Temistocle BÎRSAN[1]

Abstract. In the case of Blundon′s inequalities, the conditions when the equality holds in the left hand side are different from the ones in the right hand side. The purpose of the present note is to establish this well known result in a geometric way.

Keywords: Blundon′s inequalities, circumcenter, incenter, nine-point center.

MSC 2000: 51M16.

1. Introducere. În 1965, **W.J. Blundon** a arătat în [**2**] că într-un triunghi oarecare are loc următoarea dublă inegalitate:

Propoziţia 1. *În orice triunghi are loc dubla inegalitate:*

(1) $$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\leq p^2\leq$$
$$\leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)},$$

unde p, R, r *au semnificaţiile obişnuite.*

În [**4**], **Al. Lupaş** stabileşte pe cale algebrică condiţiile în care inegalităţile din (1) devin egalităţi:

Propoziţia 2. 1) *Are loc egalitate în partea stângă a relaţiilor* (1) *dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral sau este isoscel cu baza mai mare ca laturile egale.*

2) *Are loc egalitate în partea dreaptă dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral sau este isoscel cu baza mai mică decât laturile egale.*

D. Andrica şi **C. Barbu** în [**1**] şi **M. Drăgan, M. Haivas** şi **I.V. Maftei** în [**3**] (v. pag. 20-21 ale acestui număr de *Recreaţii Matematice*) dau demonstraţii geometrice diferite inegalităţilor lui Blundon, fără a ajunge geometric la condiţiile de egalitate menţionate în Propoziţia 1.

Scopul acestei Note este de a da inegalităţilor (1) o demonstraţie geometrică simplă şi completă (incluzând condiţiile de egalitate).

2. Consideraţii preliminare. Amintim mai întâi că într-un triunghi oarecare sunt adevărate relaţiile următoare:

(2) $$OI^2 = R(R-2r),$$

(3) $$OH^2 = 9R^2+8Rr+2r^2-2p^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2),$$

(4) $$OO_9 = \frac{1}{2}OH,$$

unde O_9 notează centrul cercului celor nouă puncte (mijlocul segmentului [OH]), celelalte notaţii fiind binecunoscute, şi *relaţia lui Sondat* (de ex., [**6**], p. 118)*:*

(5) $$S_{OIH} = \frac{1}{8r}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

[1] Prof. dr., Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi", Iaşi

Se ştie că punctul I aparţine dreptei lui Euler $[OH]$ dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel, după cum rezultă imediat din (5).

Fie ABC un triunghi isoscel cu $BC = a$ şi $AB = AC = l$. În acest caz, punctele O, H, I, O_9, A şi A'(mijlocul laturii $[BC]$) sunt coliniare, se află pe axa triunghiului. Ţinând seama de formulele $R = \dfrac{abc}{4S}$ şi $r = \dfrac{S}{p}$, deducem că

$$R = \frac{l^2}{\sqrt{4l^2 - a^2}}, \qquad r = \frac{a\sqrt{4l^2 - a^2}}{2(2l + a)}. \tag{6}$$

Putem acum să demonstrăm cu uşurinţă următoarea

Lemă. *În triunghiul isoscel ABC, cu $BC = a$ şi $AB = AC = l$, are loc relaţia:*

$$OI^2 - OO_9^2 = \frac{(l - a)^3(3l + a)}{4(4l^2 - a^2)}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Coroborând relaţiile (2), (3), (4) şi (6), putem scrie:

$$\begin{aligned}
OI^2 - OO_9^2 &= R(R - 2r) - \frac{1}{4}\left[9R^2 - (2l^2 + a^2)\right] = \frac{1}{4}\left(2l^2 + a^2 - 5R^2 - 8Rr\right) = \\
&= \frac{1}{4(4l^2 - a^2)}\left(3l^4 + 6a^2l^2 - a^4 - 8al^3\right) = \\
&= \frac{1}{4(4l^2 - a^2)}\left[\left(l^4 - a^4\right) + \left(2l^4 - 2al^3\right) + \left(6a^2l^2 - 6al^3\right)\right] = \\
&= \frac{l - a}{4(4l^2 - a^2)}\left(3l^3 + a^2l + a^3 - 5al^2\right) = \\
&= \frac{l - a}{4(4l^2 - a^2)}\left[\left(3l^3 - 3al^2\right) + \left(a^2l - al^2\right) + \left(a^3 - al^2\right)\right] = \\
&= \frac{(l - a)^2}{4(4l^2 - a^2)}\left(3l^2 - 2al - a^2\right) = \frac{(l - a)^3(3l + a)}{4(4l^2 - a^2)},
\end{aligned}$$

de unde relaţia cerută.

Poziţia punctului $I \in [OH]$ faţă de O_9 este dată de

Propoziţia 3. *În condiţiile anterioare relativ la triunghiul ABC, au loc afirmaţiile:* 1) $I \in (HO_9) \Leftrightarrow l > a$; 2) $I \in (OO_9) \Leftrightarrow l < a$; 3) $I \equiv O_9$ sau $I \equiv O$ sau $I \equiv H \Leftrightarrow l = a$ (*triunghiul ABC este echilateral*).

Demonstraţie. Utilizăm Lema precedentă. Avem:

1) $I \in (HO_9) \Leftrightarrow OI > OO_9 \Leftrightarrow OI^2 - OO_9^2 > 0 \Leftrightarrow (l - a)^3 > 0 \Leftrightarrow l > a$. La fel se dovedesc şi afirmaţiile 2) şi 3).

3. Demonstraţie geometrică a Propoziţiilor 1 şi 2. Inegalităţile (1) se obţin uşor prin aplicarea inegalităţilor triunghiulare în triunghiul IOO_9, anume

$$OI - IO_9 \le OO_9 \le OI + IO_9. \tag{8}$$

Relaţiile (2), (3) şi (4) dau OI şi OO_9 exprimate prin p, R şi r; în ce priveşte IO_9, cu teorema medianei aplicată în triunghiul IOH găsim expresia

$$IO_9 = \frac{1}{2}(R - 2r), \tag{9}$$

formulă cunoscută, demonstrată în acest număr de revistă la pag. 20 ([**3**], Lema 1, f. (5)) sau în alte lucrări (de ex., [**6**], p.123, f.(3)).

Să mai observăm că $OI - IO_9 \geq 0$; într-adevăr, $OI \geq IO_9 \Leftrightarrow R(R-2r) \geq \frac{1}{4}(R-2r)^2 \Leftrightarrow (R-2r)(3R+2r) \geq 0$, evident.

Prin ridicare la pătrat, relaţiile (8) iau forma

$$OI^2 + IO_9^2 - 2OI \cdot IO_9 \leq OO_9^2 \leq OI^2 + IO_9^2 + 2OI \cdot IO_9$$

şi, în urma înlocuirii mărimilor în funcţie de p, R şi r, devin

$$4R(R-2r) + (R-2r)^2 - 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2 \leq$$
$$\leq 4R(R-2r) + (R-2r)^2 + 4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)},$$

de unde obţinem tocmai inegalităţile (1).

Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci punctele O, I, O_9 coincid şi avem egalitate în ambii membri în (1). Dacă triunghiul ABC nu este echilateral, atunci aceste puncte nu coincid şi urmează:

Egalitate în partea stângă a dublei inegalităţi precedente avem dacă şi numai dacă $OI + IO_9 = OO_9$, adică $I \in (OO_9)$, echivalent, conform Propoziţiei 3, cu $l < a$.

Egalitate în partea dreaptă avem dacă şi numai dacă $OI - IO_9 = OO_9$, adică $I \in (HO_9)$, echivalent, conform Propoziţiei 3, cu $l > a$, ceea ce încheie demonstraţia afirmaţiilor Propoziţiilor 1 şi 2.

Observaţie. 1) În [**1**] este utilizat triunghiul OIN, N - punctul lui Nagel, se calculează $\cos \widehat{ION}$ şi se obţine (1). Punând condiţia $-1 \leq \cos \widehat{ION} \leq +1$, fără a se da precizări definitive pentru cazurile de egalitate.

2) În [**3**] este utilizat triunghiul HII', I' - simetricul lui I faţă de O_9, şi apoi inegalitatea triunghiulară în acest triunghi. Cu ajutorul unei propoziţii similare cu Propoziţia 3, ar fi fost posibilă precizarea cazurilor de egalitate până la capăt.

Bibliografie

1. **D. Andrica, C. Barbu** – *A geometric proof of Blundon's inequalities*, Math. Ineq. &Appl., Prepint (Google: `mia-2592-pre.pdf`)
2. **W.J. Blundon** – *Inequalities associated with a triangle*, Canad. Math. Bull., 8 (1965), 615-626.
3. **M. Drăgan, M. Haivas** – *demonstraţie geometrică a inegalităţii lui Blundon*, Recreaţii Matematice, nr. 1/2012, p.
4. **A. Lupaş** – *Asupra unor inegalităţi geometrice,* Revista Matematică din Timişoara, nr. 1/1984, 21-23.
5. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
6. **D. Sachelarie** – *Geometria triunghiului. Anul 2000*, Matrix Rom, Bucureşti, 2000.