Extinderea unui rezultat al lui Johann Hudde

Cornelia-Livia BEJAN[1]

Abstract. We give here an extention to series of a result obtained by **J. Hudde** concerning polynomial equations.

Keywords: polynomial, series, radius of convergence.

MSC 2000: 40A30, 40A05.

Matematicianul olandez **Johann Hudde** (1628-1704) a descris două reguli care-i poartă numele cu privire la ecuaţiile polinomiale [**1**].

Amintim aici pe una dintre ele. Peste tot în această Notă vom considera toate numerele care apar (coeficienţi, rădăcini etc.) reale.

Teorema 1 (J. Hudde)**.** *Dacă* r *este o rădăcină dublă a ecuaţiei polinomiale*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

şi dacă $b_0, b_1, ..., b_n$ *sunt numere în progresie aritmetică, atunci* r *este de asemenea o rădăcină a ecuaţiei*

$$a_n b_n x^n + a_{n-1} b_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 b_0 = 0. \tag{2}$$

Acest rezultat se poate extinde prin

Teorema 2. *Fie dată ecuaţia* (1) *de mai sus. Atunci* r *este o rădăcină dublă a acestei ecuaţii dacă şi numai dacă pentru orice progresie aritmetică* $b_0, b_1, ..., b_n$ *ecuaţia* (2) *are pe* r *ca rădăcină.*

Demostraţie. Afirmaţia directă este dată de Teorema 1. Reciproc, fie

$$b_0, b_0 + q, ..., b_0 + nq \quad \text{şi} \quad c_{0,} c_0 + q, ..., c_0 + nq$$

două progresii aritmetice cu aceeaşi raţie şi $b_0 \neq c_0$. Cum r verifică

$$a_n(b_0 + nq)x^n + a_{n-1}[b_0 + (n-1)q]x^{n-1} + ... + a_0 b_0 = 0,$$

precum şi ecuaţia

$$a_n(c_0 + nq)x^n + a_{n-1}[c_0 + (n-1)q]x^{n-1} + ... + a_0 c_0 = 0,$$

rezultă, prin scăderea acestora, că r verifică şi ecuaţia (1). În plus, luând progresia aritmetică $b_k = k$, $k = \overline{0, n}$, şi presupunând că r verifică ecuaţia (2) pentru această progresie, rezultă că r este o rădăcină dublă a ecuaţiei (1).

Pentru serii, dăm următoarea teoremă de caracterizare:

[1]Prof. dr., Departamentul de Matematică şi Informatică, Univ. Tehnică ,,Gh. Asachi”, Iaşi

Teorema 3. *Fie* $\rho \in [0, \infty]$. *Atunci seria de puteri* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* ρ *dacă şi numai dacă pentru orice progresie aritmetică infinită* $b_0, b_1, ..., b_n, ...$ *seria* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ *are raza de convergenţă* ρ.

Demonstraţie. Dacă seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergenţă ρ, atunci şi seria derivată $\sum\limits_{i=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are raza de convergenţă ρ . Fie $b_n = b_0 + qn, \forall n \in \mathbb{N}$, o progresie aritmetică infinită cu raţia q. Întrucât seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n x^n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n b_0 x^n + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cdot qn \cdot x^n = b_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n + qx \cdot \sum_{i=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

se scrie ca sumă a două serii cu aceeaşi rază de convergenţă ρ, rezultă implicaţia directă.

Reciproc, dacă $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ are raza de convergenţă ρ pentru orice progresie aritmetică infinită, considerăm în particular $b_n = n$ şi obţinem că $x \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are raza de convergenţă ρ. Deoarece pentru orice progresie aritmetică cu $b_0 \neq 0, b_n = b_0 + qn, \forall n \in \mathbb{N}$, seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ are raza de convergenţă ρ, rezultă că diferenţa

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n x^n - xq \cdot \sum_{i=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_n (b_n - nq) x^n = b_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n$$

reprezintă o serie cu raza de convergenţă ρ, ceea ce încheie demonstraţia.

Corolar 4. *Fie* $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *un şir oarecare. Atunci şirul* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \alpha^k$ *este convergent dacă şi numai dacă pentru orice progresie aritmetică infinită* $b_0, b_1, ..., b_n, ...$ *şirul* $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \alpha^k$ *este convergent.*

Bibliografie

1. **B. Boyer** – *A history of mathematics*, 2^{-nd} ed., John Wiley&Sons, Inc., 1991, p.373.
