Condiţii suficiente pentru inele Boole

Dorel MIHEŢ[1]

Abstract. The main result of this Note is Proposition 1 which provides a set of sufficient conditions such that a ring is a Boolean ring.
Keywords: ring, Boolean ring.
MSC 2000: 06E20.

Un inel Boole este un inel $(A,+,\cdot)$ în care $x^2=x$ pentru orice $x\in A$. În cartea *Matematica pentru grupele de performanţă - Clasa a XII-a* [**3**] sunt prezentate două condiţii suficiente pentru ca un inel A cu proprietatea $x^{2^m+2^n}=x\ \forall x\in A\quad (m,n\in\mathbb{N}^*)$ să fie inel Boole. Rezultatul principal al acestei note este Propoziţia 1, din care se pot obţine şi alte caracterizări ale acestor inele.

În demonstraţia Propoziţiei 1 folosim următoarele două leme:

Lema 1. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel, iar $m,n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $x^{2^m+2^n}=x\ \forall x\in A$, atunci $x^{2^{m+1}}=x\ \forall x\in A$ şi $x^{2^{n+1}}=x\ \forall x\in A$.*

Demonstraţie. Din $(-1)^{2^m+2^n}=-1$ rezultă $1=-1$. Fie x un element arbitrar al lui A. Ţinând seama de faptul că $2y=0\ \forall y\in A$, se demonstrează imediat prin inducţie că $(x+1)^{2^k}=x^{2^k}+1$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

Aşadar au loc egalităţile:

$$x+1=(x+1)^{2^m+2^n}=(x+1)^{2^m}(x+1)^{2^n}=$$

$$(x^{2^m}+1)(x^{2^n}+1)=x^{2^m+2^n}+x^{2^n}+x^{2^m}+1=x+x^{2^m}+x^{2^n}+1,$$

de unde deducem că $x^{2^m}=x^{2^n}$ şi atunci $(x^{2^m})^2=(x^{2^n})^2=x^{2^m+2^n}$, adică $x^{2^{m+1}}=x^{2^{n+1}}=x$.

Lema 2. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel, $m,n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in A$, astfel încât $x^m=x$ şi $x^n=x$. Atunci $x^{(m-1,n-1)+1}=x$.*

Demonstraţie. Se arată imediat prin inducţie că $x^{k(m-1)+1}=x$ şi $x^{l(n-1)+1}=x$ pentru orice $k,l\in\mathbb{N}$. Dacă $(m-1,n-1)=d$, atunci există $k,l\in\mathbb{N}$ astfel încât $k(m-1)-l(n-1)=d$, deci $x=x^{k(m-1)+1}=x^{d+l(n-1)+1}=x^d\cdot x^{l(n-1)+1}=x^d\cdot x=x^{d+1}$.

Propoziţia 1. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel, $m,n\in\mathbb{N}^*$, iar $d:=(m+1,\ n+1)$. Dacă $x^{2^m+2^n}=x\ \forall x\in A$, atunci $x^{2^d}=x\ \forall x\in A$.*

Demonstraţie. În conformitate cu Lema 1, pentru orice $x\in A$ au loc egalităţile $x^{2^{m+1}}=x$ şi $x^{2^{n+1}}=x$. Din Lema 2 deducem că

$$x^{(2^{n+1}-1,\ 2^{m+1}-1)+1}=x\ \forall\ x\in A$$

[1]Prof. dr., Departamentul de Matematică, Universitatea de Vest, Timişoara

şi acum concluzia rezultă dintr-un rezultat clasic de teoria numerelor:

$$(2^p - 1, 2^q - 1) = 2^{(p,q)} - 1.$$

Cazuri particulare

1) Deoarece $(n+1,\ n+2) = 1$, din Propoziţia 1 rezultă că un inel A cu proprietatea

$$x^{2^n + 2^{n+1}} = x\ \forall x \in A \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

este boolean. Mai general, dacă m şi q sunt două numere întregi pozitive fixate, iar

$$x^{2^{q(m+1)} + 2^m} = x\ \forall x \in A,$$

atunci A este inel boolean ([**4**], Prop. 3).

În particular, orice inel A cu proprietatea

$$x^{4^n + 2} = x\ \forall x \in A$$

este boolean.

2) ([**1**, Theorem A], [**2**]) *Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ astfel încât numărul $p = 2^m + 2^n - 1$ este prim impar. Dacă A este un inel cu proprietatea $x^{2^m + 2^n} = x\ \forall x \in A$, atunci A este boolean.*

Demonstraţie. Remarcăm mai întâi că m şi n sunt pozitive. Fie $d = (m+1, n+1)$. Vom arăta că $d = 1$.

Din $p + 1 = 2^m + 2^n$ rezultă că $(2^{m+1} - 1) + (2^{n+1} - 1) = 2p$, deci $2^d - 1$ este un divizor impar al lui $2p$. Prin urmare $2^d - 1 \mid p$ şi cum $2^d - 1 \leq 2^{n+1} - 1 < 2^m + 2^n - 1 = p$, rezultă că $2^d - 1 = 1$, deci $d = 1$.

3) ([**4**], Prop. 4) *Fie $m, q \in \mathbb{N}^*$, iar $r \in \mathbb{N}$, $r < m + 1$. Dacă A este un inel cu proprietatea $x^{2^{q(m+1)+r} + 2^m} = x\ \forall x \in A$, atunci $x^{2^{r+1}} = x\ \forall x \in A$.*

Demonstraţie. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor $q(m+1) + r + 1$ şi $m + 1$. Din Propoziţia 1, $x^{2^d} = x$ pentru orice $x \in A$ şi se demonstrează imediat prin inducţie după l că $x^{2^{ld}} = x$, pentru orice $l \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in A$ (pentru pasul de inducţie observăm că $x^{2^{ld}} = x \Rightarrow (x^{2^{ld}})^{2^d} = x^{2^d} = x$, iar $(x^{2^{ld}})^{2^d} = x^{2^{ld} \cdot 2^d} = x^{2^{ld+d}} = x^{2^{(l+1)d}}$).

Deoarece $(q(m+1) + r + 1, m + 1) = (r + 1, m + 1)$, d divide numărul $r + 1$, iar dacă $r + 1 = kd$, din cele de mai sus rezultă că $x^{2^{r+1}} = x^{2^{kd}} = x\ \forall x \in A$, ceea ce trebuia demonstrat.

Bibliografie

1. **R. Ayoub, C. Ayoub** - *On the Commutativity of Rings*, The American Mathematical Monthly, Vol. 71 (3) (1964), 267-271.
2. **D. Isac** - *Condiţii suficiente pentru inele Boole*, GMB 3/1995, 541-544.
3. **V. Pop, V. Lupşor** (coordonatori) - *Matematica pentru grupele de performanţă Clasa a XII-a*, Ed. Dacia Educaţional, 2004.
4. **J.-S. Shiue, W.-M Chao** - *On the boolean rings*, Yokohama Math. J. 24 (1976), 93-96.