Asupra calculării unor integrale definite

Mihai DICU [1]

Abstract. The aim of this paper is to calculate the integrals of type (1), when the constants m, n, p, q satisfy certain conditions.
Keywords: parallelogram identity, homographic function.

MSC 2000: 26A42.

Scopul propus este calcularea unor integrale de forma

$$I = \int_a^b \frac{\ln(mx+n)}{x^2+px+q}dx \tag{1}$$

folosind schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$, unde φ este funcţia omografică

$$\varphi : [a,b] \to [a,b], \ \ \varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ şi } \gamma t + \delta \neq 0, \ \forall t \in [a,b]). \tag{2}$$

Cazul particular $p = 0$ este tratat în [**1**]; preocupări asemănătoare găsim în [**2**]. Vor fi impuse anumite condiţii constantelor m, n, p, q şi coeficienţilor funcţiei φ, unele naturale şi altele menite să asigure derularea etapelor caculului.

Considerăm $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, $\delta \neq 0$ şi cerem funcţiei φ să îndeplinească condiţiile: $\varphi(a) = b$ şi $\varphi(b) = a$. Urmează că $\alpha a + \beta = \gamma ab + \delta b$ şi $\alpha b + \beta = \gamma ab + \delta a$, de unde, prin scădere, obţinem $\alpha + \delta = 0$. Notând $u = \dfrac{\beta}{\delta}$ şi $v = \dfrac{\gamma}{\delta}$, găsim că φ are forma:

$$\varphi(t) = \frac{u-t}{1+vt}, \quad t \in [a,b], \tag{3}$$

iar a, b, u, v sunt legate prin egalitatea

$$a + b + abv = u. \tag{4}$$

Observăm că $1 + vt \neq 0$ pentru $t \in [a,b]$, $1 + uv \neq 0$ şi că $\varphi'(t) = -\dfrac{1+uv}{(1+vt)^2}$.

Efectuând schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$ cu φ dată de (3), vom avea

$$I = -(1+uv)\int_b^a \frac{\ln[(nv-m)t + (mu+n)] - \ln(1+vt)}{(1-pv+qv^2)t^2 + (-p-2u+puv+2qv)t + (q+pu+u^2)}dt. \tag{5}$$

Pentru reducere la integrala iniţială impunem condiţiile:

$$nv - m = 0 \quad \text{şi} \tag{6}$$

$$1 - pv + qv^2 = \frac{-p-2u+puv+2qv}{p} = \frac{q+pu+u^2}{q} = k, \tag{7}$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

care asigură eliminarea unui termen la numărător şi coincidenţa numitorului (până la factorul k) cu numitorul din integrala (1).

Ţinând seama de (6) şi (7), relaţia (5) se scrie

$$I = \frac{1+uv}{k}\left[\int_a^b \frac{\ln(mu+n)}{t^2+pt+q}dt - \int_a^b \frac{\ln(1+vt)}{t^2+pt+q}dt\right].$$

Cum am presupus $n \neq 0$, din (6), (4) şi (7) obţinem pentru u, v, k expresiile:

$$v = \frac{m}{n}, \quad u = mab + n(a+b), \quad k = \frac{1}{n^2}(qm^2 - pmn + n^2). \tag{8}$$

Înlocuind în a doua integrală din paranteza pătrată pe v cu expresia dată de prima relaţie din (8), obţinem succesiv:

$$I = \frac{1+uv}{k}\left[\int_a^b \frac{\ln(mu+n)+\ln n}{t^2+pt+q}dt - I\right],$$

$$I = \frac{1+uv}{1+k+uv}\ln n(mu+n)\int_a^b \frac{dx}{x^2+px+q} \tag{9}$$

(se consideră $n > 0$ şi $mu + n > 0$).

Calculul integralei din membrul doi fiind cunoscut, rezultă că formula (9) rezolvă problema pusă. Îndeplinirea condiţiilor (7) cu u, v, k daţi de (8) limitează eficienţa acestei formule.

În continuare, vom urmări detaliat calculul integralei I, discutând după valorile lui q.

I. Cazul $q = 0$. Condiţiile (7) revin la relaţiile:

$$u(p+u) = 0, \quad p(2 - pv - uv) = -2u. \tag{7'}$$

Dacă $u = 0$, găsim $v = \dfrac{2}{p}$ şi din (4) rezultă că $a + b + abv = 0$; deci $p = -\dfrac{2ab}{a+b}$. Numitorul din integrală, $g(x) = x^2 + px$, $x \in [a, b]$, se anulează în interiorul intervalului: $g(a)g(b) = (a^2+pa)(b^2+pb) = ab(p+a)(p+b) = -\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}(a-b)^2 < 0$. În acest caz integrala nu are sens.

Dacă $u = -p$, este verificată şi a doua relaţie din (7′). Constatăm cu uşurinţă că avem $k = 1 + uv$, iar din (9) obţinem în acest caz

$$I = \frac{1}{2}\ln n(n-mp)\int_a^b \frac{dx}{x^2+px}(n > 0, n - mp > 0).$$

Exemplu. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{\ln(x+6)}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\ln 12 \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x}$ etc. (cu formula precedentă sau direct cu schimbarea de variabilă $x = -6\dfrac{t+4}{t+6}$).

II. Cazul $q \neq 0$. Condiţiile (7) conduc la sistemul

$$(7'') \qquad q(1-pv+qv^2) = q+pu+u^2, \quad p(1-pv+qv^2) = -p-2u+puv+2qv.$$

Înmulţind prima relaţie cu $-p$ şi pe a doua cu q şi apoi adunând, obţinem

$$(pu+2q)(p+u-qv) = 0.$$

II.1. Dacă $u = -\dfrac{2q}{p}$, înlocuind în prima relaţie din (7″) obţinem ecuaţia în v: $(pv-2)(pqv-p^2+2q) = 0$ şi avem $v = \dfrac{2}{p}$ sau $v = \dfrac{p^2-2q}{pq}$.

În cazul $u = -\dfrac{2q}{p}$ şi $v = \dfrac{2}{p} \overset{(6)}{=} \dfrac{m}{n}$, condiţia (4) se scrie $p(a+b)+2ab = -2q$. Notând $\Delta = p^2-4q$ (discriminantul trinomului x^2+px+q), prin calcule de rutină se obţin egalităţile:

$$(a^2+pa+q)(b^2+pb+q) = -\frac{\Delta}{4}(a-b)^2, \quad (ma+n)(mb+n) = \frac{m^2}{4}\Delta.$$

Dacă $\Delta > 0$, atunci prima spune că trinomul se anulează în intervalul $[a,b]$ de integrare; dacă $\Delta < 0$, a doua spune că binomul $mx+n$ are aceeaşi proprietate. În ambele cazuri, integrala I nu are sens. Dacă însă $\Delta = 0$, I se calculează uşor prin părţi.

În cazul $u = -\dfrac{2q}{p}$ şi $v = \dfrac{p^2-2q}{pq} = \dfrac{m}{n}$, prin calcul obţinem $1+uv = k = -\dfrac{\Delta}{p^2}$ şi $n(mu+n) = -\dfrac{n^2}{p^2}\Delta$. Integralele I pentru care $\Delta = p^2-4q < 0$ sunt date, conform formulei (9), de

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{n^2}{p^2}\Delta\right)\int_a^b \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Exemplu. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln 3\int_0^2 \frac{dx}{x^2-x+1}$ (cu formula precedentă în care luăm $m=n=-p=q=1$, $v=1$, $u=2$ sau folosind schimbarea $x = \dfrac{2-t}{1+t}$).

II.2. Dacă $v = \dfrac{p+u}{q} \overset{(6)}{=} \dfrac{m}{n}$, obţinem $1+uv = k = \dfrac{1}{n^2}(n^2-mnp+m^2q)$ şi $n(mu+n) = n^2-mnp+m^2q$. Ca urmare,

$$I = \frac{1}{2}\ln(n^2-mnp+m^2q)\int_0^b \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Exemplu. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(3-x)}{x^2-x-4}dx = \frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x-4}$ (se utilizează formula precedentă sau schimbarea de variabilă $x = \dfrac{7-3t}{3-t}$).

Observaţie. Dacă $n = 0$ (caz exclus mai sus), vom calcula integrala $I = \displaystyle\int_a^b \frac{\ln x}{x^2+px+q}dx$ $(0 < a < b)$ efectuând o schimbare de variabilă $x = \varphi(t)$ cu o funcţie de forma $\varphi(t) = \dfrac{\alpha}{t}$. Din $\varphi(a) = b$ şi $\varphi(b) = a$ găsim $\alpha = ab$, iar din condiţiile de proporţionalitate avem $q = ab$. Se obţine

$$I = \frac{1}{2}\ln ab\int_a^b \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

În concluzie, pentru a calcula integrale de tipul (1) putem proceda astfel:

(i) căutăm schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$ cu $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ şi $\varphi(t) = \dfrac{\alpha t+\beta}{mt+n}$;

(ii) impunem condiţiile $\varphi(a) = b$ şi $\varphi(b) = a$ şi determinăm α şi β;

(iii) dacă α şi β găsiţi îndeplinesc şi celelalte condiţii puse în evidenţă mai sus în fiecare caz în parte, atunci schimbarea de variabilă este eficace şi calculul integralei este posibil în acest mod.

Bibliografie

1. **M. Dicu** - *O generalizare a unei integrale*, G.M.-2/2000, 74-76.
2. **T. Tămâian** - *O metodă pentru calculul unor integrale*, G.M.-2-2004, 63-66.

Recreații ... matematice

Reconstituiţi adunarea:

```
  * * *
  * * *
  -----
  * * *
```

în care trebuie să folosiţi toate cifrele de la 1 *la 9 o singură dată, iar rezultatul să fie format din cifre consecutive. Câte posibilităţi există?*

Neculai Stanciu, Buzău

(*continuare la pag. 22*)