O identitate cu numere complexe şi consecinţele sale geometrice

Nicolae BOURBĂCUŢ[1]

Abstract. In this paper one proves the relation (2.1), and one shows a few particular cases of this relation.

Keywords: parallelogram identity, Leibniz relation, Euler inequality.

MSC 2000: 97D50.

1. Introducere. Deşi reprezintă o noţiune cu caracter algebric, numerele complexe au devenit un instrument extrem de util şi în studiul geometriei. Multe relaţii în care intervin numerele complexe au primit interpretări geometrice care au condus la rezultate foarte interesante. Una dintre cele mai cunoscute este următoarea:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2, \tag{1.1}$$

valabilă pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$. Relaţia, cunoscută sub numele *identitatea paralelogramului*, a primit ulterior o generalizare, cunoscută sub numele *relaţia Leibniz-Lagrange*, care se poate găsi în [**4**], [**7**] sau [**8**].

În acest articol vom demonstra că această generalizare are loc în condiţii mai slabe. Ca o consecinţă vom obţine demonstraţii nu foarte dificile pentru câteva identităţi sau inegalităţi geometrice mai mult sau mai puţin cunoscute.

2. Identităţi cu numere complexe. Acest paragraf este rezervat rezultatelor legate de numerele complexe.

Propoziţia 2.1. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ şi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Pentru orice numere complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are loc identitatea:*

$$|a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_nz_n|^2=\sum_{k=1}^{n}a_k|z_k|^2-\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_ka_l|z_k-z_l|^2. \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned}
&|a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_nz_n|^2+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_ka_l|z_k-z_l|^2=\\
&=(a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_nz_n)(a_1\overline{z_1}+a_2\overline{z_2}+\ldots+a_n\overline{z_n})+\\
&+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_ka_l(z_k-z_l)(\overline{z_k}-\overline{z_l})=\sum_{k=1}^{n}a_k^2z_k\overline{z_k}+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_ka_l(z_k\overline{z_l}+z_l\overline{z_k})+\\
&+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{l=1,l\neq k}^{n}a_lz_k\overline{z_k}\right)-\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_ka_l(z_k\overline{z_l}+_l\overline{z_k})+\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sum_{l=1}^{n}a_l|z_k|^2\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{n}a_k|z_k|^2, \text{ ceea ce încheie demonstraţia.}
\end{aligned}$$

[1] Sarmizegetusa, România

Corolarul 2.2. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *şi numerele reale* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *cu proprietatea* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. *Atunci pentru orice numere complexe* $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ *are loc identitatea:*

$$|z - a_1 z_1 - a_2 z_2 - \ldots - a_n z_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k |z - z_k|^2 - \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} a_k a_l |z_k - z_l|^2. \tag{2.2}$$

Demonstraţie. Se aplică 2.1 pentru numerele complexe $z - z_1, z - z_2, \ldots, z - z_n$.

Corolarul 2.3. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Atunci pentru orice numere complexe* $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ *are loc identitatea:*

$$\left| z - \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} \right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |z_k - z_l|^2. \tag{2.3}$$

Demonstraţie. Se aplică 2.2 pentru numerele $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

Corolarul 2.4. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *şi numerele reale* $b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Atunci pentru orice numere complexe* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *are loc identitatea:*

$$\begin{aligned} |b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_n z_n|^2 &= (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \sum_{k=1}^{n} b_k |z_k|^2 \\ &- \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} b_k b_l |z_k - z_l|^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Fie $S = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Dacă $S \neq 0$ atunci rezultatul este consecinţa directă a aplicării Propoziţiei 2.1 pentru numerele $a_1 = \dfrac{b_1}{S}$, $a_2 = \dfrac{b_2}{S}, \ldots, a_n = \dfrac{b_n}{S}$. Dacă $S = 0$ se verifică printr-un calcul direct.

Din Corolarul 2.4 obţinem fără dificultate următoarele rezultate:

Corolarul 2.5. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *şi numerele reale pozitive* $b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Atunci pentru orice numere complexe* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *are loc inegalitatea:*

$$|b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_n z_n|^2 \leqslant (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \sum_{k=1}^{n} b_k |z_k|^2. \tag{2.5}$$

Corolarul 2.6. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *şi numerele reale pozitive* $b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Atunci pentru orice numere complexe* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *are loc inegalitatea:*

$$\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} b_k b_l |z_k - z_l|^2 \leqslant (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \sum_{k=1}^{n} b_k |z_k|^2. \tag{2.6}$$

Dacă în (2.3) alegem $n = 2$ şi $z = 0$ obţinem chiar identitatea paralelogramului. Dacă alegem $n = 3$ obţinem

$$\frac{1}{9} |z_1 + z_2 + z_3|^2 = \frac{1}{3} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \right) - \frac{1}{9} \left(|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 \right),$$

care combinată cu (1.1) conduce la

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 + z_3|^2 + |z_2 + z_3|^2, \tag{2.7}$$

cunoscută sub numele de *identitatea lui Hlawka.*

3. Identităţi geometrice. Relaţiile din paragraful anterior au consecinţe geometrice deosebite. Pe tot parcursul acestui paragraf vom nota cu z_A afixul punctului A şi analoagele, iar pentru elementele unui triunghi vom folosi notaţiile uzuale.

Fie punctele A, B, C necoliniare. Se cunoaşte că pentru orice punct P din planul triunghiului ABC există şi sunt unice numerele reale α, β, γ cu $\alpha + \beta + \gamma = 1$, astfel încât $z_P = \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$ (vezi [**1**]). Pentru orice alt punct M din acelaşi plan avem

$$MP^2 = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 - \alpha\beta AB^2 - \alpha\gamma AC^2 - \beta\gamma BC^2, \tag{3.1}$$

ca o consecinţă a relaţiei (2.2). Relaţia (3.1) admite diferite particularizări:

Pentru $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{3}$, obţinem $P = G$ şi

$$MG^2 = \frac{1}{3}\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

adică *relaţia lui Leibniz.* Dacă în plus alegem $M = O$ obţinem

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

care conduce apoi la inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$.

Pentru $\alpha = \dfrac{a}{a+b+c}$, $\beta = \dfrac{b}{a+b+c}$, $\gamma = \dfrac{c}{a+b+c}$ obţinem $P = I$ şi

$$MI^2 = \frac{aMA^2 + bMB^2 + MC^2 - abc}{a+b+c}.$$

Pentru $M = O$ şi folosind $abc = 4RS$ şi $S = pr$ obţinem

$$OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

care apoi conduce la $R \geqslant 2r$, adică *inegalitatea lui Euler.*

Pentru $\alpha = \dfrac{-a}{-a+b+c}$, $\beta = \dfrac{b}{-a+b+c}$, $\gamma = \dfrac{c}{-a+b+c}$, obţinem $P = I_A$, adică centrul cercului exînscris corespunzător laturii BC şi

$$MI_A^2 = \frac{-aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 + abc}{-a+b+c}.$$

Pentru $M = O$ obţinem

$$OI_A^2 = R^2 + \frac{abc}{-a+b+c}.$$

Pentru un punct $P \in (BC)$, cu $\beta = \dfrac{BP}{BC}$, $\gamma = \dfrac{CP}{BC}$, $\alpha = 0$ şi $M = A$ obţinem

$$AB^2 \cdot PC - AP^2 \cdot BC + AC^2 \cdot PB = PB \cdot PC \cdot BC,$$

adică *relaţia lui Stewart*.

Fie acum patrulaterul $ABCD$ şi E, F mijloacele diagonalelor AC respectiv BD. În (2.4) alegem $n = 4$, $b_1 = b_2 = \dfrac{1}{2}$, $b_3 = b_4 = -\dfrac{1}{2}$, $z_1 = z_A$, $z_2 = z_C$, $z_3 = z_B$, $z_4 = z_D$ şi obţinem

$$EF^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2\right),$$

adică *relaţia lui Euler* în patrulater.

În partea a doua a acestui paragraf vom prezenta câteva rezultate general valabile în orice poligon cu n laturi.

Propoziţia 3.1. *Dacă M este un punct oarecare în planul poligonului $A_1A_2\ldots A_n$, iar G este centrul său de greutate, atunci are loc relaţia*:

$$MG^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_iA_j^2.$$

Demonstraţie. Este interpretarea geometrică a relaţiei (2.3).

Corolarul 3.2. *Dacă $A_1A_2\ldots A_n$ este un patrulater înscris într-un cerc de rază R, atunci are loc inegalitatea:*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_iA_j^2 \leqslant n^2R^2.$$

Demonstraţie. Din 3.1. obţinem $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 - \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_iA_j^2 \geqslant 0$ şi apoi concluzia prin alegerea lui M ca fiind centrul cercului.

Propoziţia 3.3. *Dacă M, N sunt două puncte din planul poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ şi $a_1, a_2, \cdots, a_n$, respectiv $b_1, b_2, \cdots, b_n$ numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$, $z_M = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kz_k$ şi $z_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_kz_k$, atunci are loc relaţia*

$$MN^2 = -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (b_j - a_j)(b_i - a_i)\left|z_i - z_j\right|^2,$$

unde z_k reprezintă afixul vârfului A_k al poligonului.

Demonstraţie. Avem

$$MN^2 = \left|z_M - z_N\right|^2 = \left|z_M - \sum_{k=1}^{n} b_kz_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k\left|z_M - z_k\right|^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_ib_j\left|z_i - z_j\right|^2.$$

Dar $|z_M - z_k|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i - z_k\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i |z_k - z_i|^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j |z_i - z_j|^2$. Atunci obţinem

$$MN^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{i=1}^{n} a_i |z_k - z_i|^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j |z_i - z_j|^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_i b_j |z_i - z_j|^2.$$

Dar $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$, deci $MN^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j + a_j b_i - a_i a_j - b_i b_j) |z_i - z_j|^2$, ceea ce este echivalent cu concluzia.

4. Inegalităţi geometrice. Identităţile anterioare conduc la câteva inegalităţi remarcabile, dintre care o parte sunt menţionate în continuare.

Propoziţia 4.1. *Într-un plan considerăm punctele distincte $A_1, A_2, \cdots, A_n$ şi numerele reale $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. Pentru orice punct M din plan are loc inegalitatea:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k M A_k^2\right) \geqslant \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \beta_k \beta_l A_k A_j^2. \tag{4.1}$$

Demonstraţie. Se aplică (2.6) pentru numerele complexe $z - z_1$, $z - z_2, \cdots, z - z_n$ unde z,z_1, $z_2, \cdots, z_n$, reprezintă afixele punctelor M, $A_1, \cdots, A_n$.

În cazul particular al unui triunghi ABC şi al numerelor reale α, β, γ, (4.1) devine

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left(\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2\right) \geqslant \alpha\beta AB^2 + \alpha\gamma AC^2 + \beta\gamma BC^2. \tag{4.2}$$

Corolarul 4.2. *Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC are loc inegalitatea*

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geqslant abc.$$

Demonstraţie. Se aplică (4.2) pentru numerele reale a, b, c. O altă soluţie se găseşte în [**2**].

Corolarul 4.3. *Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC are loc relaţia*

$$aMB \cdot MC + bMA \cdot MC + cMA \cdot MB \geqslant abc.$$

Demonstraţie. Se aplică (4.2) pentru numerele reale $\alpha = \frac{a}{MA}, \beta = \frac{b}{MB}$, $\gamma = \frac{c}{MC}$ şi obţinem $\left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC}\right)(aMA + bMB + cMC) \geqslant \frac{abc^2}{MA \cdot MB} + \frac{ab^2c}{MA \cdot MC} + \frac{a^2bc}{MB \cdot MC}$, adică $\left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC}\right)(aMA + bMB + cMC) \geqslant \frac{abc}{MA \cdot MB \cdot MC}(aMA + bMB + cMC)$, ceea ce conduce la concluzie. O altă soluţie se găseşte în [**2**].

Corolarul 4.4(Weitzenböck). *În orice triunghi are loc relaţia*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

Demonstraţie. În (4.2) alegem $\alpha = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\beta = \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\gamma = \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ şi $M = O$, obţinem $R^2 \geqslant \dfrac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$, adică $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{abc\sqrt{3}}{R}$ şi concluzia.

Bibliografie

1. **T. Andreescu, D. Andrica** - *Complex Numbers from A to Z*, Birkhäuser, Boston, 2006.
2. **T. Andreescu, D. Andrica** - *Proving Some Geometric Inequalities by Using Complex Numbers*, Educaţia Matematică, vol. 1, nr. 2 (2005), 19-26.
3. **V. Băndilă** - *O generalizare a unei relaţii a lui Leibniz şi aplicarea ei la calcularea distanţelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi*, Gazeta Matematică, 90 (1985), nr. 2.
4. **O. Bottema, R.R. Janic, D.S. Mitrinovic** - *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoe Publishing, Groningen 1969.
5. **D. Marinescu** - *O identitate cu numere complexe*, Gazeta Matematică, seria B, nr. 12(1995).
6. **D. Marinescu, I. Şerdean** - *Inegalităţi geometrice. Aplicaţii*, Recreaţii Matematice 2002, nr. 1.
7. **C.P. Niculescu** - *Interferenţe între mecanică şi geometrie*, Gazeta Matematică, seria A, Vol XIX, nr. 2.
8. **O. Pop** - *About Bergstrom's inequality*, Journal of Mathematical Inequalities, Vol.3, nr. 2(2009).
9. **R. Weitzenböck** - *Uber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*, Mathematische Zeitschrift, 5(1919), no. 1-2, 137-14.

Vizitaţi pagina web a revistei *Recreaţii Matematice*:

http://www.recreatiimatematice.ro