Inegalităţi omogene şi puţină analiză...

Titu ZVONARU[1]

Vom stabili printr-o metodă unitară câteva inegalităţi în trei variabile a, b, c care îndeplinesc condiţia $a+b+c=1$. Să remarcăm că, pentru inegalităţi omogene, această condiţie poate fi oricând adăugată, fără pierderea generalităţii.

Exemplul 1 (*Inegalitea lui Nesbitt*). $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Soluţie. Inegalitatea fiind omogenă, putem presupune $a+b+c=1$. Avem $\dfrac{x}{1-x}\geq\dfrac{9x-1}{4}$, $\forall x\in(0,1)$ (inegalitate echivalentă cu $(3x-1)^2\geq 0$). Ca urmare $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}\geq\dfrac{9a-1}{4}+\dfrac{9b-1}{4}+\dfrac{9c-1}{4}=\dfrac{3}{2}$. (egalităţile care apar sunt justificate de faptul că $a+b+c=1$) şi inegalitatea este demonstrată.

Această soluţie este de tip "iepuraşul scos din joben" şi cititorul se întreabă de unde a apărut inegalitatea ajutătoare. Răspundem acestei întrebări, arătând totodată şi ideea călăuzitoare a notei noastre.

Considerăm funcţia $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$. Tangenta la graficul ei în punctul de abscisă $\dfrac{1}{3}$ are ecuaţia

$$y-f\Big(\frac{1}{3}\Big)=f'\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\Leftrightarrow y=\frac{9x-1}{4}.$$

Deoarece funcţia este convexă, pe tot domeniul său de definiţie, graficul ei este situat "deasupra" tangentei, fapt care se traduce prin inegalitatea utilizată mai sus. Alegerea punctului de abscisă $\dfrac{1}{3}$ este, desigur, motivată de cazul de egalitate $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Exemplul 2 (*Polonia, 1996*). *Pentru orice* $a,b,c\geq-\dfrac{3}{4}$ *cu* $a+b+c=1$ *are loc*

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}.$$

Soluţie. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă $\dfrac{1}{3}$ are ecuaţia $y=\dfrac{36x+3}{50}$, iar acest punct este situat într-un interval de concavitate a funcţiei f. Inegalitatea $\dfrac{x}{x^2+1}\leq\dfrac{36x+3}{50}$ (de altfel echivalentă cu $(3x-1)^2(4x+3)\geq 0$), este valabilă pentru orice $x\geq-\dfrac{3}{4}$ şi se poate aplica numerelor a, b, c. Inegalitatea cerută rezultă prin sumarea inegalităţilor de acest tip scrise pentru a,b,c şi din faptul că $a+b+c=1$:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{36a+3}{50}+\frac{36b+3}{50}+\frac{36c+3}{50}=\frac{9}{10}.$$

[1] Comăneşti, e-mail: tzvonaru@hotmail.com

(Până la urmă, metoda aceasta este o metodă de spargere a inegalităţilor.)

Exemplul 3 (*USAMO, 2003*)**.** Pentru orice a, b, c pozitive are loc

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Indicaţie. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a+b+c=1$. Are loc inegalitatea $\dfrac{4x+1}{3x^2-2x+1}\leq\dfrac{12x+3}{2}$, $\forall x>0$, (care este echivalentă cu $(4x+1)(3x-1)^2\geq 0$) şi apoi o folosim ca în exemplele anterioare.

Exemplul 4 (*OIM, 1995 şi C:1952 din GM 7-8/1997*)**.** *Pentru* $\forall a,b,c>0$ *avem*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Indicaţie. Inegalitatea care trebuie folosită în acest exemplu este $\dfrac{x^2}{1-x}\geq\dfrac{5x-1}{4}$, $x\in(0,1)$.

Exemplul 5 (*E:10888 din GM 2/1995*)**.** *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Atunci*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Indicaţie. Are loc inegalitatea $\dfrac{x}{1-2x}\geq 9x-2$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Exemplul 6 (*Japonia, 1997*)**.** *Pentru orice $a,b,c>0$ are loc inegalitatea*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geq\frac{3}{5}.$$

Indicaţie. Se va utiliza $\dfrac{1}{2x^2-2x+1}\leq\dfrac{54x+27}{25}$, $\forall x>0$.

Exemplul 7. $\dfrac{a}{ma+b+c}+\dfrac{b}{a+mb+c}+\dfrac{c}{a+b+mc}\leq\dfrac{3}{m+2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, $m\geq 1$ (o generalizare a problemei *C:1079*, *GM 1/1991*).

Indicaţie. Folosiţi inegalitatea $\dfrac{x}{1+(m-1)x}\leq\dfrac{9x+m-1}{(m+2)^2}$! Încercaţi şi cu substituţiile $ma+b+c=u$, $a+mb+c=v$, $a+b+mc=w$!

Exemplul 8 (*USAMO, SummerProgram, 2002*)**.** *Pentru orice $a,b,c>0$ are loc*

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3.$$

*Indicaţie***.** Avem $\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3x\Leftrightarrow(3x-1)^2(3x-4)\leq 0$ pentru orice $x\in(0,1)$.

Propunem cititorului următoarele exerciţii:

Exerciţiul 1 (*Gigel Buth* şi *Liviu Vlaicu, RMT 2/1998*)**.** *Pentru $a,b,c>0$ şi $n\geq m>0$ are loc*

$$\frac{a}{ma+nb+nc}+\frac{b}{mb+nc+na}+\frac{c}{mc+na+nb}\geq\frac{3}{m+2n}.$$

Exercițiul 2 (*Ungaria, 1996*). *Pentru a și b mai mari ca -1 cu $a+b=1$, avem*

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}.$$

Exercițiul 3. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha>\frac{1}{n^2}$ și $a_1,\dots,a_n\geq-\frac{2n\alpha}{n^2\alpha-1}$ astfel încât $a_1+\cdots+a_n=1$. Să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{a_1}{a_1^2+\alpha}+\cdots+\frac{a_n}{a_n^2+\alpha}\leq\frac{n^2}{n^2\alpha+1}.$$

Exercițiul 4 (*India,1995*). *Pentru orice $a_1,\dots,a_n$ pozitive și cu suma 1, are loc inegalitatea*

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\cdots+\frac{a_n}{1-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Exercițiul 5. *Pentru $a,b,c>0$ cu $a+b+c=1$ avem*

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1}\leq\frac{27}{28}.$$

Exercițiul 6 (*Sefket Arslanagic, 2787, Crux Mathematicorum*). *Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=1$. Atunci*

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+a}{2}\right)^2}\geq\frac{27}{8}.$$

Exercițiul 7 (*Sefket Arslanagic, 2739, Crux Mathematicorum*). *Pentru orice $a,b,c>0$ are loc inegalitatea*

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

Exercițiul 8. *Pentru $a,b,c>0$ și având suma 1, este adevărată inegalitatea*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{100}{9}.$$

Exercițiul 9 (*Sefket Arslanagic, 2738, Crux Mathematicorum*). *Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Atunci avem*

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Exercițiul 10 (*Panos E. Tsaoussoglou, 2946, Crux Mathematicorum*). *Fie $a,b,c>0$ și $a^2+b^2+c^2=1$. Avem*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-a-b-c\geq 2\sqrt{3}\quad\text{și}\quad\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a+b+c\geq 4\sqrt{3}.$$

Exercițiul 11. *Pentru $a,b,c\leq 1$ cu $a+b+c=1$ are loc*

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leq\frac{27}{10}.$$