Asupra unei probleme de concurs

Angela ŢIGĂERU[1]

În nota de faţă ne propunem determinarea unei condiţii suficiente care să asigure convergenţa integralelor de forma

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}dx, \quad a > 0.$$

Vom demonstra că uniforma mărginire a expresiei $xf(x)$ este suficientă pentru convergenţa acestui tip de integrale, extinzând astfel rezultatul cuprins în *Problemă 1*, cl. a XII-a, dată la O.N.M. din anul 2000, propusă de **Mihai Piticari** şi **Sorin Rădulescu**, condiţia folosită acolo fiind doar existenţa şi finitudinea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ (problema citată, cu rezolvarea autorilor, poate fi consultată în [**1**]).

Pentru început, vom prezenta câteva definiţii şi rezultate de bază. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în $[a,\infty)$.

Definiţie. Spunem că funcţia f este *integrabilă pe intervalul* $[a,\infty)$ dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Dacă f este integrablă pe $[a,\infty)$, vom nota

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Dacă condiţia (1) este îndeplinită, se mai foloseşte formularea: *integrala* $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$ *este covergentă.* O condiţie necesară, nu şi suficientă, îndeplinită de o funcţie integrabilă pe intervalul $[a,\infty)$ este ca $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Un rezultat teoretic fundamental, pe care îl folosim în demonstraţie este

Criteriul lui Cauchy. *Funcţia* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a,\infty)$ *dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există numărul real* $A(\varepsilon) > 0$, *astfel încât, pentru orice* $x > A(\varepsilon)$ *şi pentru orice* $y > 0$, *este valabilă relaţia*

$$\left|\int_x^{x+y} f(t)\,dt\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Există o literatură vastă care are ca subiect determinarea unor criterii eficiente de convergenţă a integralelor de tipul (1) sau de calcul efectiv, cititorul interesat de mai multe detalii putând consulta [**3**].

Rezultatul notei de faţă este

Propoziţia 1. *Se consideră funcţia* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, $a>0$, *integrabilă pe orice compact inclus în* $[a,\infty)$. *Dacă există* $M>0$ *astfel încât*

$$|xf(x)| \le M, \quad \forall x\in[a,\infty), \tag{3}$$

atunci $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ *este convergentă.*

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Petru Rareş", Suceava

Demonstraţie. În adevăr, pentru un $\varepsilon > 0$, considerăm $A(\varepsilon) = \dfrac{M}{\varepsilon}$. Dacă $x > A(\varepsilon)$, atunci, pentru orice $y > 0$, avem

$$\left|\int_x^{x+y} \frac{f(t)}{t} dt\right| \leq \int_x^{x+y} |tf(t)| \frac{1}{t^2} dt \leq M \int_x^{x+y} \frac{1}{t^2} dt = \frac{M}{x} \frac{y}{x+y}.$$

Cum $\dfrac{y}{x+y} < 1$ şi deoarece $x > A(\varepsilon) = \dfrac{M}{\varepsilon}$, rezultă că $\dfrac{M}{x}\dfrac{y}{x+y} < \varepsilon$, deci $\left|\int\limits_x^{x+y} \dfrac{f(t)}{t} dt\right| < \varepsilon$, adică, urmare a criteriului Cauchy, integrala $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt$ este convergentă.

O consecinţă a rezultatului demonstrat mai sus este

Propoziţia 2. *Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, care satisface condiţiile Propoziţiei 1. Atunci, pentru orice $a > 1$, este valabilă relaţia*

$$\lim_{x\to\infty} x \int_1^a f(t^x)\, dt = \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{4}$$

Demonstraţie. Cu schimbarea de variabilă $u = t^x$ se obţine egalitatea

$$x \int_1^a f(t^x)\, dt = \int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du.$$

Avem succesiv:

$$\left|\int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du - \int_1^{a^x} \frac{f(u)}{u} du\right| \leq \int_1^{a^x} |uf(u)| \frac{u^{\frac{1}{x}} - 1}{u^2} du \leq M \int\limits_1^{a^x} \left(u^{\frac{1}{x}-2} - \frac{1}{u^2}\right) du =$$

$$= M\left(\frac{x}{1-x}\left(a^{1-x} - 1\right) + a^{-x} - 1\right);$$

trecând la limită şi ţinând cont de $a > 1$, deducem $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\int\limits_1^{a^x} \dfrac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du - \int\limits_1^{a^x} \dfrac{f(u)}{u} du\right| = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^{a^x} \dfrac{f(u)}{u} u^{\frac{1}{x}} du = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^{a^x} \dfrac{f(u)}{u} du = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt$, q.e.d.

Următorul exemplu poate forma o imagine asupra ariei de aplicabilitate a rezultatelor de mai sus.

Exemplul 1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \dfrac{\{x^n\}}{x^n} dx = 1 - c$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x, $a > 1$ şi c este *constanta lui Euler*.

Rezolvare. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\{x\}}{x}$, care satisface condiţiile din propoziţia 2, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \dfrac{\{x^n\}}{x^n} dx = \lim\limits_{x\to\infty} x \int\limits_1^a \dfrac{\{t^x\}}{t^x} dt = \int\limits_1^{\infty} \dfrac{\{x\}}{x^2} dx$. Pentru calculul ultimei integrale procedăm astfel:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{\{x\}}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{x-k}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{x}\Big|_k^{k+1} + \ln x\Big|_k^{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) + (\ln(k+1) - \ln k) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{k+1} + (\ln(k+1) - \ln k) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \ln n \right) \right) = 1 - c,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_1^a \frac{\{x^n\}}{x^n}\, dx = 1 - c$.

Propoziţia 1 stă şi la baza următorului rezultat

Propoziţia 3. *Se consideră funcţia* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, *continuă pe* $[a, \infty)$, *care satisface condiţia* (3). *Atunci* $\int\limits_a^\infty \frac{F(x)}{x} dx$ *este convergentă, unde* $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *este o primitivă a funcţiei* f *şi, mai mult, este adevărată relaţia*

$$\int_a^\infty \frac{F(x)}{x^2} dt = \frac{F(a)}{a} + \int_a^\infty \frac{f(x)}{x} dx. \tag{5}$$

Demonstraţie. Pentru $x > a$ avem

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^x \frac{F'(t)}{t} dt = \frac{F(t)}{t}\Big|_a^x + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2} dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(a)}{a} + \int_a^x \frac{F(t)}{t^2} dt. \quad (*)$$

Tot din condiţia (3), se obţine că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, de unde, conform Lemei 1 din [**2**], se deduce că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$, demonstraţia nefiind imediată, deoarece condiţia (3) nu asigură aplicarea directă a lemei lui l'Hospital. Trecând la limită în relaţia $(*)$, se obţine (5) şi demonstraţia se încheie.

Exemplul 2. Se consideră $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, prelungită prin continuitate în $x = 0$. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\int\limits_a^\infty \frac{F(x)}{x^2} dx$ este convergentă pentru orice $a > 0$ şi $\int\limits_a^\infty \frac{F(x)}{x^2} dt = \frac{F(a)}{a} + \int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$.

Încheiem, propunându-i cititorului exerciţiul următor:

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^a \frac{d(x^n)}{x^n} dx = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ \cdots \ \cdot (2n-1)^2}{4^{2n} \cdot n!\,(n-1)!} \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

unde $d(x) = \inf\{x - n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bibliografie

1. *Gazeta Matematică*, 7-8/2000, p.265 şi p.275.

2. D. T. Onofrei - *Asupra comportării la limită a unor primitive,* Recreaţii matematice, II(2000), nr. 2, 28-29.

3. A. Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.