O problemă de combinatorică destul de grea

Marian TETIVA[1]

În această notă ne ocupăm de următoarea

Problemă. *Din oricare $2n+1$ numere întregi (distincte) ale căror module nu depăşesc pe $2n-1$, se pot alege trei (tot distincte) care au suma zero.*

Este o problemă de olimpiadă (cu regret, nu ştiu unde am întâlnit-o) mai grea decât pare la prima vedere. Pentru rezolvare, însă, nu avem nevoie decât de aşa-numitul *"principiu al cutiei"* (*"principiul lui Dirichlet"*, mai este numit în literatura matematică românească; *"the pigeonhole principle"*, în cea engleză şi americană): *dacă vrem să repartizăm $n+1$ obiecte în n cutii, atunci trebuie ca într-o cutie să fie mai mult de un obiect.* De asemenea, nu e nevoie, în esenţă, de alt tip de raţionament decât cel din problema lui **Erdös** [**1**] (una din rarele probleme "foarte simple" propuse de Erdös). Această problemă cere

să se arate că pentru $k > [(n+1)/2]$ şi $a_1, \ldots, a_k$ numere întregi astfel încât $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n$ există două printre ele a căror sumă este tot unul din aceste numere.

Soluţia [**2**] este destul de simplă: să observăm că $a_1, \ldots, a_k$ pe de o parte, şi $a_2-a_1, \ldots, a_k-a_1$ pe de alta, sunt $2k-1$ numere din mulţimea $\{1, \ldots, n\}$. Cum $2k-1 > n$ două dintre acestea sunt egale (conform principiului cutiei!) şi, pentru că numerele din prima grupă sunt diferite două câte două (ceea ce e valabil şi pentru numerele din a doua grupă), ajungem la o egalitate de forma $a_i = a_j - a_1 \Leftrightarrow a_i + a_1 = a_j$ care rezolvă problema. Mai mult, pentru $k = [(n+1)/2]$, se pot găsi k numere printre primele n numere întregi pozitive astfel încât suma oricăror două *nu* este egală cu un al treilea dintre ele; de exemplu, numerele $[n/2]+1$, $[n/2]+2$, $\ldots$, n (tot din soluţia citată).

În cele ce urmează vom arăta cum se rezolvă problema de la care am pornit folosind aceeaşi idee (de mai multe ori vom utiliza acest tip de raţionament), considerând-o folositoare pentru cei care se pregătesc pentru olimpiade, sau, în general, pentru o activitate matematică susţinută.

Soluţia problemei. Avem de considerat câteva cazuri.

Primul (şi cel mai simplu) dintre ele este acela în care 0 este unul dintre numerele $a_1, \ldots, a_{2n+1}$. Într-adevăr, $2n$ numere din cele $2n+1$ sunt nenule, deci modulele lor aparţin mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$; atunci (conform principiului cutiei) două dintre module trebuie să fie egale, iar o asemenea egalitate furnizează două numere care au suma 0. Aceste două numere şi 0 sunt, desigur, cele trei numere căutate (care au suma 0).

Considerăm acum că 0 nu este printre cele $2n+1$ numere, pe care le notăm cu

$$-(2n-1) \le a_1 < \cdots < a_i < 0 < a_{i+1} < \cdots < a_{2n+1} \le 2n-1.$$

Se poate uşor observa că există cel puţin două numere negative şi cel puţin două numere pozitive.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Al doilea caz este acela în care $|a_i| \neq a_{i+1}$; să presupunem, de exemplu, că $|a_i| < a_{i+1}$. Avem

$$1 \leq a_i + a_{i+1} < \cdots < a_i + a_{2n+1} \leq 2n - 1$$

şi

$$1 \leq -a_{i-1} < \cdots < -a_1 \leq 2n - 1,$$

adică din nou două grupe conţinând un total de $2n$ numere din mulţimea $\{1, \ldots, 2n-1\}$, în fiecare grupă numerele fiind distincte; prin urmare există un $j \in \{i+1, \ldots, 2n+1\}$ şi un $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ astfel încât $a_i + a_j = -a_k \Leftrightarrow a_i + a_j + a_k = 0$, ceea ce era de demonstrat (evident, i, j, k sunt diferite două câte două). Cazul $|a_i| > a_{i+1}$ este absolut analog, suntem deci siguri că nu va reprezenta o problemă pentru cititorul interesat.

Cazul al treilea este şi cel mai greu. Ne aflăm acum în situaţia în care $|a_i| = a_{i+1}$ şi observăm (aşa cum cititorul trebuie să fi observat deja) că demonstraţia de mai sus nu mai este valabilă pentru că $a_i + a_{i+1} = 0$ face să crească numărul "cutiilor" în care trebuie aşezate obiectele (făcând principiul inaplicabil!). Din fericire, obstacolul nu este insurmontabil. Observăm mai întâi că acum avem, de fapt,

$$1 \leq a_i + a_{i+2} < \cdots < a_i + a_{2n+1} \leq 2n - 2$$

şi, pentru $a_1 > -(2n-1)$,

$$1 \leq -a_{i-1} < \cdots < -a_1 \leq 2n - 2;$$

astfel că demonstraţia din al doilea caz se poate utiliza şi acum. Similar se rezolvă cazul $a_{2n+1} < 2n - 1$, deci putem presupune în continuare că $a_1 = -(2n-1)$ şi $a_{2n+1} = 2n - 1$. Şi iar considerăm două posibilităţi: $i \leq n$ sau $i \geq n+1$.

Dacă $i \leq n$ avem numerele $a_{i+1}, \ldots, a_{2n}$ şi $2n - 1 - a_{i+1}, \ldots, 2n - 1 - a_{2n}$, care sunt toate din mulţimea $\{1, \ldots, 2n-1\}$ şi sunt în număr de $2(2n-i) \geq 2n$; rezultă că există $j, k \in \{i+1, \ldots, 2n\}$ aşa încât $a_j = 2n - 1 - a_k$. Avem $j \neq k$ deoarece $2n-1$ este impar şi egalitatea se mai scrie $a_1 + a_j + a_k = 0$.

În cazul $i \geq n+1$ procedăm la fel cu numerele $-a_2, \ldots, -a_i$ şi $2n - 1 + a_2, \ldots, 2n - 1 + a_i$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţii. 1) Cititorul atent trebuie să fi observat deja că $0, 1, \ldots, 2n-1$ sunt $2n$ numere din intervalul $[-(2n-1), 2n-1]$ printre care nu există trei cu suma 0; sau, analog, se pot alege $0, -1, \ldots, -(2n-1)$ cu aceeaşi proprietate, deci $2n+1$ este cel mai mic număr k astfel încât oricum am alege k numere din mulţimea $\{-(2n-1), \ldots, 2n-1\}$ există printre ele trei cu suma 0.

2) O întrebare se pune în mod natural în legătură cu această problemă şi cu observaţia anterioară: care sunt toate posibilităţile de a alege $2n$ numere din mulţimea $\{-(2n-1), \ldots, 2n-1\}$ astfel încât printre ele să nu existe trei a căror sumă să fie 0? Lăsăm în seama cititorului rezolvarea acestei probleme.

Bibliografie

1. **P. Erdös** - *Problema E736*, The American Mathematical Monthly, 53(1946), 462.
2. **L. Moser** - *Soluţia problemei E736*, The American Mathematical Monthly, 54(1947), 229-230.