ARTICOLE ŞI NOTE

Polinoame Fibonacci, polinoame ciclotomice

Loredana STRUGARIU, Ciprian STRUGARIU[1]

Deoarece şirul lui Fibonacci este cunoscut elevilor încă din cl. a IX-a, iar rădăcinile de ordinul n ale unităţii şi polinoamele ciclotomice sunt în materia prevăzută la cl. a X-a pentru olimpiada de matematică, considerăm că abordarea unui asemenea subiect este utilă atât elevilor cât şi profesorilor. Vom prezenta câteva rezultate privind polinoamele Fibonacci şi cele ciclotomice şi legătura dintre ele.

1. Polinoame Fibonacci - definire, legătura cu triunghiul lui Pascal. Polinoamele Fibonacci sunt definite prin relaţia de recurenţă

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), \quad \text{cu} \quad F_1(x) = 1 \quad \text{şi} \quad F_2(x) = x \tag{1}$$

sau prin următoarea formulă explicită

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1}, \tag{2}$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar $\binom{n-j-1}{j} \equiv C_{n-j-1}^{j}$. Se convine ca $F_0 = 0$.

Observaţie. Polinoamele Fibonacci pot fi definite prin relaţia de recurenţă

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \quad \text{cu} \quad F_0(x) = 0 \quad \text{şi} \quad F_1(x) = 1. \tag{1'}$$

Exemple: $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$, $F_3(x) = x^2+1$, $F_4(x) = x^3+2x$, $F_5(x) = x^4+3x^2+1$ etc. Luând $x = 1$ în (2), obţinem $F_n(1) = F_n$, unde F_n este *şirul lui Fibonacci.*

Lema 1 (*proprietatea de divizibilitate*). *Dacă m este divizor al lui n, atunci F_m este divizor al lui F_n. Dacă p este un număr prim, atunci $F_p(x)$ este polinom ireductibil.*

Teorema 1. *Fie F_0, F_1, F_2, ... polinoamele Fibonacci peste câmpul Galois de dimensiune 2. Atunci, avem:*

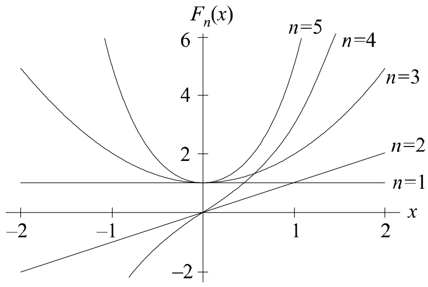
1) *F_{2n+1} sunt singurii termeni de grad par şi nu sunt divizibili cu x; F_{2n} sunt singurii termeni de grad impar, $n \geq 0$;*
2) *$F_{n-t} + F_{n+t} = xF_nF_t$, pentru $0 \leq t \leq n$;*
3) *$F_{2n} = xF_n^2$, pentru $n \geq 0$;*
4) *$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$, pentru $n \geq 0$;*
5) *$F_{mn}(x) = F_m(x)\, F_n(xF_m(x))$, pentru pentru $m, n \geq 0$;*
6) *$F_{2mn-p} = xF_{mn}F_{mn-p} + F_p$, pentru $0 \leq p \leq mn$;*
7) *$F_{2mn+p} = xF_{mn}F_{mn+p} + F_p$.*

Rădăcinile polinomului $F_n(x)$ sunt de forma $x_k = 2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, pentru $k = 1, \ldots, n-1$. Pentru p număr *prim*, aceste rădăcini sunt de $2i$ ori partea reală a

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuţi (Suceava)

rădăcinilor polinomului ciclotomic de ordinul p. Analizând coeficienţii primelor polinoame Fibonacci se observă legătura dintre triunghiul lui Pascal şi aceste polinoame:

$F_1(x) = \mathbf{1}x^0$
$F_2(x) = \mathbf{1}x^1$
$F_3(x) = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_4(x) = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{2}x$
$F_5(x) = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{3}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_6(x) = \mathbf{1}x^5 + \mathbf{4}x^3 + \mathbf{3}x^1$
$F_7(x) = \mathbf{1}x^6 + \mathbf{5}x^4 + \mathbf{6}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_8(x) = \mathbf{1}x^7 + \mathbf{6}x^5 + \mathbf{10}x^3 + \mathbf{4}x^1$
$F_9(x) = \mathbf{1}x^8 + \mathbf{7}x^6 + \mathbf{15}x^4 + \mathbf{10}x^2 + \mathbf{1}x^0$
$F_{10}(x) = \mathbf{1}x^9 + \mathbf{8}x^7 + \mathbf{21}x^5 + \mathbf{20}x^2 + \mathbf{5}x^1.$



A. N. Philippou şi asociaţii săi [**4**] au studiat polinoamele Fibonacci de ordinul k, $k \geq 2$, pe care le-au definite astfel:

$$\begin{aligned} &F_0^{(k)}(x) = 0,\ F_1^{(k)}(x) = 1 \\ &F_n^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{k-j} F_{n-j}^{(k)}(x), \quad n = 2, 3, \ldots, k; \\ &F_n^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{k} x^{k-j} F_{n-j}^{(k)}(x), \quad n = k+1, k+2, \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Observaţie. Pentru $k = 2$ acestea se reduc la $F_n(x)$, iar pentru $k = 1$ se reduc la şirul lui Fibonacci $F_n^{(k)}$ de ordinul k.

2. Polinoame ciclotomice - definire, proprietăţi. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^n = 1$ se numesc *rădăcinile de ordin n ale unităţii.* Acestea sunt numere complexe de forma

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Mulţimea acestor rădăcini se notează cu

$$U_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}.$$

Teorema 2. *Mulţimea U_n este un grup ciclic faţă de înmulţirea numerelor complexe, numit grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii.*

Propoziţie. *Fie $U_n = \left\{x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k = 1, 2, \ldots, n-1.\right\}$. Atunci*

$$\langle x_k \rangle = U_n \quad \Leftrightarrow \quad (k, n) = 1. \tag{5}$$

Grupul ciclic U_n are $\varphi(n)$ generatori, unde $\varphi(n)$ este numărul numerelor naturale mai mici ca n, relativ prime cu n (*indicatorul lui Euler*). Cele $\varphi(n)$ rădăcini de ordinul n ale unităţii care generează grupul U_n, adică numerele complexe de forma

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ (k, n) = 1. \tag{6}$$

se numesc *rădăcinile primitive de ordinul n ale unităţii.* Notăm cu P_n mulţimea rădăcinilor primitive de ordinul n ale unităţii şi cu ζ o rădăcină primitivă (oarecare) de ordinul n a unităţii.

Teorema 3.
$$P_n = \left\{\zeta^k \mid 0 \leq k \leq n-1,\ (k,n) = 1\right\}. \tag{7}$$

Observaţie. Dacă $n = p =$ număr prim, atunci $P_p = U_p \setminus \{1\}$.

Teorema 4. 1) $\bigcup\limits_{d|n} P_d = U_n$,

2) $P_{d_1} \bigcap P_{d_2} = \emptyset$, *$d_1$, d_2 divizori naturali ai lui n, $d_1 \neq d_2$.*

Polinomul monic ale cărui rădăcini sunt rădăcinile primitive de ordinul n ale unităţii, se numeste *al n-lea polinom ciclotomic* şi are forma
$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in P_n} (X - \zeta), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$
Gradul polinomului ciclotomic $\Phi_n(X)$ este egal cu cardinalul mulţimii P_n, adică $\varphi(n)$.

Teorema 5 (*relaţia lui Dedekind*)**.**
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X) \tag{9}$$
unde produsul se face după toţi divizorii naturali ai lui n.

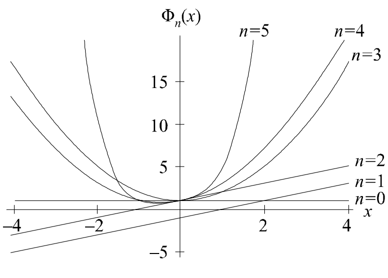
Demonstraţie. Folosind descompunerea în factori a polinomului $X^n - 1$ şi Teorema 4, avem
$$X^n - 1 = \prod_{\zeta \in U_n} (X - \zeta) = \prod_{\zeta \in \bigcup\limits_{d|n} P_d} (X - \zeta) = \prod_{d|n} \left(\prod_{\zeta \in P_d} (X - \zeta) \right) = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Teorema 6. *Pentru $p > 0$, număr prim, avem:*
$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1. \tag{10}$$

Observaţie. $\Phi_{p^k}(X) = \Phi_p\left(X^{p^{k-1}}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, p număr prim, $p > 0$.

Exemple. Primele 10 polinoame ciclotomice:

$\Phi_1(X) = X - 1$
$\Phi_2(X) = X + 1$
$\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$
$\Phi_4(X) = X^2 + 1$
$\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$
$\Phi_7(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
$\Phi_8(X) = X^4 + 1$
$\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$
$\Phi_{10}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1.$



Teorema 7 (*relaţia lui Möbius-Dedekind*)**.** *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există relaţia:*
$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} \left(X^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}, \tag{11}$$

unde $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ *este funcţia lui Möbius,* dată prin

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 1, \\ (-1)^k, \text{ dacă } n = p_1 p_2 \cdots p_k \ \ (p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ prime distincte}), \\ 0, \text{ dacă } n \text{ se divide prin patratul unui numar prim.} \end{cases}$$

Alte proprietăţi ale polinoamelor ciclotomice:
1) $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
2) $\Phi_n(X)$ este ireductibil în inelul $\mathbb{Z}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
3) $\Phi_n(X)$ este un polinom reciproc, $\forall n \geq 2$,
4) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p > 0$ un număr prim avem:
i) dacă p divide n, $\Phi_{np}(X) = \Phi_n(X^p)$,
ii) dacă p nu divide n, $\Phi_{np}(X) = \dfrac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}$,
5) $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$, pentru $n > 1$, număr natural impar.

3. Legătura dintre polinoamele Fibonacci şi polinoamele ciclotomice. Această legătură a fost expusă de **K. Kuwano** în *The Design of Mathematic Workshop* (în japoneză), Scientist, 2004 şi apoi preluată de **K. Motose** în [**3**].

Considerând două variabile x şi y şi notând cu $X = x + y$ şi $Y = xy$, vom defini polinoamele simetrice $F_n(X, Y)$ prin

$$F_n(X, Y) = \frac{x^n - y^n}{x - y}, \tag{12}$$

numite *polinoame Fibonacci de două variabile.*

Exemple. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = x + y = X$, $F_3 = x^2 + y^2 + xy = X^2 - Y$ etc.

Lema 2. *i*) $F_{m+n} = F_m F_{n+1} - Y F_{m-1} F_n$, *pentru* $n \geq 0$ *şi* $m \geq 1$*; în particular,*

$$F_{n+2} = X F_{n+1} - Y F_n. \tag{13}$$

ii) *Dacă* m *este divizor al lui* n, *atunci* F_m *este divizor al lui* F_n.

Demonstraţie. *i*) direct prin înlocuire în formula (12).
ii) Deoarece $x^m - y^m$ este divizor al lui $x^n - y^n$, rezultă afirmaţia.

Observaţie. Dacă considerăm în formula (13) $X = 1$ şi $Y = -1$, obţinem şirul lui Fibonacci, fapt pentru care polinoamele $F_n(X, Y)$ au fost numite polinoame Fibonacci. O altă formă a polinoamelor Fibonacci de două variabile este:

$$F_n(x, y) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} y^j, \quad n \geq 1. \tag{14}$$

În mod inductiv, vom defini *polinoamele ciclotomice de două variabile*

$$\Phi_1(x, y) = x - y, \quad x^n - y^n = \prod_{d|n} \Phi_d(x, y). \tag{15}$$

Lema 3. *i*) $\Phi_n(x, y) = \prod_{d|n} \left(x^d - y^d\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$.
ii) $\Phi_n(x) = \Phi_n(x, 1)$.
iii) $\Phi_n(x, y) = \Phi_n(y, x)$, *pentru* $n \geq 2$.

Demonstraţie. $i)$ rezultă din formula de inversiune a lui Möbius, iar $ii)$ din $i)$ şi definiţia lui $\Phi_n(x)$. $iii)$ decurge din punctul $i)$ şi formula $\sum\limits_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ pentru $n \geq 2$.

Deoarece polinoamele $\Phi_n(x, y)$ sunt simetrice pentru $n \geq 2$, putem defini polinoamele $P_n(X, Y)$ unde $X = x + y$, $Y = xy$ astfel încât $\Phi_n(x, y) = P_n(X, Y)$. De exemplu, $P_6 = x^2 + y^2 - xy = X^2 - 3Y$.

Teorema 8. *Vom conveni ca $P_1 = 1$. Atunci, avem:*

1) *P_n este ireductibil în $\mathbb{Z}[X, Y]$;*

2) $F_n = \prod\limits_{d|n} P_d$;

3) $P_n = \prod\limits_{d|n} F_d^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$;

4) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, *unde* $(\,,)$ *reprezintă c.m.m.d.c.; în particular* $(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Demonstraţie. 1) $P_n \in \mathbb{Z}[X, Y]$ din definiţie. Dacă $P_n = ST$, cu $S, T \in \mathbb{Q}[X, Y]$ polinoame neconstante, atunci $\Phi(x) = \Phi(x, 1) = P(x+1, x) = S(x+1, x)\, T(x+1, x)$ pentru polinoamele neconstante $S(x + 1, x), T(x + 1, x) \in \mathbb{Q}[x]$, contrar ireductibilităţii peste $\mathbb{Q}$.

2) Rezultă din următoarea ecuaţie:

$$F_n(X, Y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} = \prod_{1 \prec d|n} \Phi_d(x, y) = \prod_{d|n} P_d(x, y).$$

3) Rezultă din formula de inversiune a lui Möbius.

4) Dacă mai întâi considerăm $P_d = P_{d'}$ atunci avem:

$$\Phi_d(x) = \Phi_d(x, 1) = P_d(x + 1, x) = P_{d'}(x + 1, x) = \Phi_{d'}(x)$$

şi astfel $d = d'$. Din Lema 2, $ii)$, ştim că $F_{(m,n)}$ este divizor comun al lui F_m şi F_n.

Dacă P_d este divizor comun al lui F_m şi F_n, atunci d este divizor comun al lui m şi n şi deci d este divizor al lui (m, n). Astfel P_d este divizor al lui $F_{(m,n)}$. Deci, dacă D este divizor comun al lui F_m şi F_n, atunci D este divizor al lui $F_{(m,n)}$, deoarece D este un produs al polinoamelor ireductibile distincte P_d, ceea ce implică afirmaţia.

Bibliografie

1. **T. M. Apostol** - *Resultants of Cyclotomic Polynomials.* Proc. Amer. Math. Soc. 24(1970), 457-462.
2. **T. Koshy** - *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* New York: Wiley, 2001.
3. **K. Motose** - *On values of cyclotomic polynomials.* VII, Math J. Okayama Univ., 2004.
4. **A. N. Philippou, C. Georghiou, G. N. Philippou** - *Fibonacci polynomials of order k, multinomial expansions and probability*, Internat. J. Math. Math. Sci., 6(1983), 545-550.
5. **M. Ţena** - *Rădăcinile unităţii*, Soc. Şt. Mat., Bucureşti, 2005.
6. **W. A. Webb, E. A. Parberry** - *Divizibility Properties of Fibonacci Polynomials*, Fibonacci Quarterly 7.5 (1969), 457-463.
7. http://mathworld.wolfram.com