Submulţimi ale unei mulţimi finite şi matrici binare

Adrian REISNER[1]

Fie dată o mulţime X de cardinal $|X|$ finit. Considerăm familia $\mathcal{F}$ de submulţimi ale lui X având anumite proprietăţi. Utilizând *matricele binare* (adică acelea ce au ca elemente 0 sau 1), vom demonstra câteva rezultate privind familia $\mathcal{F}$.

I Familii cu proprietatea $\mathcal{P}$. Fie $\mathcal{F}$ o familie de submulţimi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ale mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$. Spunem că familia $\mathcal{F}$ verifică proprietatea $\mathcal{P}$, dacă ea îndeplineşte condiţiile următoare:

a) $|X_i| = \alpha + \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$;

b) $|X_i \cap X_j| = \beta$, $\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i \neq j$.

Spunem că familia $\mathcal{F}$ verifică *proprietatea duală* $\mathcal{P}'$ a proprietăţii $\mathcal{P}$ dacă îndeplineşte condiţiile:

a′) $\forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$ aparţine la exact $\alpha+\beta$ submulţimi X_i ale lui $\mathcal{F}$;

b′) $\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ şi distincte aparţin la exact β submulţimi ale lui $\mathcal{F}$.

Numim *matrice asociată* familiei $\mathcal{F}$, matricea binară $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definită prin $a_{ij} = 1$ dacă $i \in X_j$ şi $a_{ij} = 0$ în caz contrar. De asemenea, dată o matrice binară A, se poate face trecerea "inversă" la o familie de submulţimi ale lui X într-un mod evident.

Pentru familiile cu proprietatea $\mathcal{P}$, ne propunem să găsim o relaţie între n, α, β şi să demonstrăm proprietatea duală $\mathcal{P}'$.

Propoziţia 1. *Sunt adevărate afirmaţiile:*

1. *$\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P} \Leftrightarrow {}^tAA = \alpha I + \beta J$ (1);*
2. *$\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}' \Leftrightarrow A\,{}^tA = \alpha I + \beta J$ (1′),*

unde I este matricea unitate şi J este matricea cu toate elementele 1.

Demonstraţie. Calculând produsul ${}^tAA$, ţinând seama de condiţiile *a*) şi *b*), obţinem matricea având elementele de pe diagonala principală egale cu $\alpha+\beta$ şi celelalte egale cu β, adică matricea $\alpha I + \beta J$; formula (1) este astfel stabilită.

Invers, dacă (1) are loc, avem $|X_i| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} =$ elemetul de indice i de pe diagonala matricei $A\,{}^tA \overset{(1)}{=} \alpha+\beta$, adică proprietatea *a*). La fel, $|X_i \cap X_j| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \beta$, adică proprietatea *b*).

Afirmaţia 1′ se dovedeşte cu argumente similare.

Propoziţia 2. *Dacă $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $A \in GL_n(\mathbb{R})$ şi $\sqrt{(\alpha+n\beta)\,\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z}^n$.*

Demonstraţie. Să dovedim că A este inversabilă, i.e. $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Avem:

$$\det(\alpha I + \beta J) = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \ldots & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \ldots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+n\beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \beta & \alpha+\beta & \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \ldots & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+n\beta)\,\alpha^{n-1}.$$

[1] Cercetător, Centrul de calcul E.N.S.T., Paris

(ultima egalitate se obţine în urma scăderii primei coloane din celelalte). Deci, $(\det A)^2 = \det({}^tAA) = \det(\alpha I+\beta J) = (\alpha+n\beta)\,\alpha^{n-1}$ şi $\det A = \varepsilon\sqrt{(\alpha+n\beta)\,\alpha^{n-1}} \neq 0$, unde $\varepsilon = \pm 1$. Demonstraţia se încheie, deoarece pentru orice matrice binară A avem $\det A \in \mathbb{Z}$.

Propoziţia 3. *Dacă familia $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $\alpha + n\beta = (\alpha+\beta)^2$.*

Demonstraţie. Prin calcul direct, obţinem că $JA = (\alpha+\beta)\,J$ (3) sau $J = (\alpha+\beta)\,JA^{-1}$ (A fiind inversabilă) sau $JA^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}J$ (4).

Din (1) deducem că $J\,{}^tAA = \alpha J + \beta J^2 = (\alpha+n\beta)\,J$, de unde, ţinând seama de (4), $J\,{}^tA = (\alpha+n\beta)\,JA^{-1} = \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J$. Ca urmare, $AJ = {}^t(J\,{}^tA) = \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J$ (5) şi $JAJ = \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J^2 = n\dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J$. Pe de altă parte, datorită relaţiei (3), $JAJ = (\alpha+\beta)\,J^2 = n\,(\alpha+\beta)\,J$. În consecinţă, $n\dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta} = n\,(\alpha+\beta)$ şi rezultă că (3) este adevărată.

Propoziţia 4. *$\mathcal{F}$ având proprietatea $\mathcal{P}$, au loc relaţiile:*
1° $AJ = JA$,
2° ${}^tAA = A\,{}^tA$ (i.e. A este matrice normală).

Demonstraţie. 1° $AJ \overset{(5)}{=} \dfrac{\alpha+n\beta}{\alpha+\beta}J \overset{(2)}{=} (\alpha+\beta)\,J \overset{(3)}{=} JA$.

2° ${}^tAA \overset{(1)}{=} \alpha I + \beta J = \alpha I + \beta\left[{}^t\left(A^{-1}\right){}^tA\right]J = \alpha I + \beta\,{}^t\left(A^{-1}\right)({}^tAJ) \overset{1°}{=}$

$$= \alpha I + \beta\,{}^t\left(A^{-1}\right)J\,{}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right)(\alpha I + \beta J)\,{}^tA \overset{(1)}{=} {}^t\left(A^{-1}\right)\left({}^tAA\right){}^tA = A\,{}^tA.$$

Propoziţia 5. *Dacă familia de submulţimi $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$, atunci ea are şi proprietatea duală $\mathcal{P}'$.*

Demonstraţie. Conform Propoziţiilor 1 şi 4, avem ${}^tAA = \alpha I + \beta J$ şi ${}^tAA = A\,{}^tA$. Deci $A\,{}^tA = \alpha I + \beta J$ şi, conform punctului $1'$ al Propoziţiei 1, deducem că $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}'$.

Caz particular şi exemplu. Pentru $\beta = 1$, relaţiile (1) şi (2) se scriu ${}^tAA = \alpha I + J$ şi $n = \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha\,(\alpha+1) + 1$ (deci n este impar!). Atunci $\det A = \varepsilon\sqrt{(\alpha+n)\,\alpha^{n-1}} = \varepsilon\,(\alpha+1)\,\alpha^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \in \mathbb{Z}^*$. De exemplu, matricea binară

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verifică ${}^tAA = A\,{}^tA = 2I + J$. Avem $\alpha = 2$ şi $\det A = -24$.

II Familii cu proprietatea $\mathcal{R}$. Fie X o mulţime de cardinal $n \geq 3$ şi $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ o familie de submulţimi strict incluse în X. Spunem că această familie verifică *proprietatea* $\mathcal{R}$ dacă pentru orice pereche $(i,j)\in X^2$ există şi este unică o mulţime X_k din familie astfel încât $\{i,j\}\subset X_k$.

Asociem matricea binară $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ luând $b_{ij}=1$ dacă $i\in X_j$ şi $b_{ij}=0$ în caz contrar. Ţinând seama de proprietatea $\mathcal{R}$ şi utilizând notaţii evidente pentru elementele unei matrice relativ la matricea $B^{\,t}B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem:

(*i*) $(B^{\,t}B)_{ij}=1$ dacă $i\neq j$, căci elementul $(B^{\,t}B)_{ij}$ corespunde la numărul submulţimilor conţinând $\{i,j\}$;

(*ii*) $(B^{\,t}B)_{ii}=d_i$, unde d_i este numărul submulţimilor ce conţin elementul i.

Aşadar,

$$B^{\,t}B=\begin{pmatrix} d_1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & d_2 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & d_n\end{pmatrix}.$$

Fie X_k o submulţime ce conţine elementul i. Deoarece $X_k\neq X$, există $j\neq i$ cu $j\notin X_k$. Ca urmare, există cel puţin o submulţime X_l diferită de X_k conţinând pe i. Rezultă că $d_i>1$, adică $d_i=1+a_i$, iar $a_i>0$.

Propoziţia 6. *Dacă familia* $\{X_1,X_2,\dots,X_m\}$ *are proprietatea* $\mathcal{R}$, *atunci matricea* $B^{\,t}B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este inversabilă, i.e.* $B^{\,t}B\in GL_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Considerăm

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x\\ x & x+a_2 & \dots & x\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x & x & \dots & x+a_n\end{vmatrix},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Observăm că f este o funcţie polinomială şi $f(1)=\det(B^{\,t}B)$. Derivata f' este o sumă de n determinanţi având o coloană (coloana derivată!) cu toate elementele egale cu 1:

$$f'(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x\\ 1 & x+a_2 & \dots & x\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x & \dots & x+a_n\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & 1\\ x & x+a_2 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x & x & \dots & 1\end{vmatrix}.$$

Derivata f'' va fi o sumă de determinanţi având două coloane cu elementele egale cu 1; deci $f''(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ca urmare, $f(x)=ax+b$ şi, din $f(0)=b$ şi $f'(0)=a$, găsim

$$b=\prod_{i=1}^{n}a_i,\quad a=\prod_{i\neq 1}a_i+\dots+\prod_{i\neq n}a_i.$$

În sfârşit,

$$\det\left(B^{\,t}B\right)=f(1)=a+b=\prod_{i=1}^{n}a_i+\prod_{i\neq 1}a_i+\dots+\prod_{i\neq n}a_i\neq 0,$$

adică $B^{\,t}B\in GL_n(\mathbb{R})$.

Observaţie. În ipotezele Propoziţiei 6, avem $\operatorname{rang}(B^{\,t}B)=n\leq m$ (deoarece $\operatorname{rang}(B^{\,t}B)=n\leq\operatorname{rang}B\leq m$).