O generalizare a teoremelor Stolz-Cesaro

Sorin PUŞPANĂ[1]

1. Rezultate clasice. Vom prezenta în această primă parte bine-cunoscutele teoreme Stolz-Cesaro şi o reciprocă a lor, omiţând demonstraţiile (pentru care pot fi consultate [**2**] şi [**3**]).

Teorema 1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât: i) şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit, ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teorema 2. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *iii) şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teorema 3. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$.

2. Generalizări. Teorema 1 admite următoarea generalizarea (cu pierderea cazului limitei infinite):

Teorema 4. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât: i)* $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, *ii) şirul* $\left(\frac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit, iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstraţie. Dacă $\varepsilon > 0$ şi M este un majorant pentru şirul de la *ii*), atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq m$ să avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \Leftrightarrow |a_{n+1}-a_n - l(b_{n+1}-b_n)| < \frac{\varepsilon}{2M}|b_{n+1}-b_n| \Rightarrow$$

$$|a_n - a_m - l(b_n-b_m)| < \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=m}^{n-1}|b_{i+1}-b_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}|b_n|, \quad \forall n \geq m.$$

Obţinem astfel

$$\left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{|b_n|}{|b_n-b_m|}, \quad \forall n > m.$$

Dar

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| = \left|\frac{a_m - lb_m}{b_n} + \left(\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right)\frac{b_n-b_m}{b_n}\right| <$$

$$< \frac{|a_m-lb_m|}{|b_n|} + \left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m} - l\right|\frac{|b_n-b_m|}{|b_n|} < \frac{|a_m-lb_m|}{|b_n|} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq m.$$

---

[1] Profesor, Craiova

Corolarul 1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât:* *i)* *şirul* $(|b_n|)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit,* *ii)* *şirul* $\left(\frac{|b_{n+1}-b_n|}{|b_{n+1}|-|b_n|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit,* *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l\in\mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Într-adevar, ipotezele *i)* şi *ii)* implică primele două ipoteze ale Teoremei 4.

Teorema 2 admite următoarea generalizare (cu pierderea cazului limitei infinite):

Teorema 5. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât:* *i)* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, *ii)* *şirul* $\left(\frac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit,* *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l\in\mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Demonstraţie. Dacă $\varepsilon>0$ şi M este un majorant pentru şirul de la *ii)*, atunci există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n\geq m$ să avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-l\right|<\frac{\varepsilon}{M}\Leftrightarrow|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)|<\frac{\varepsilon}{M}\,|b_{n+1}-b_n|\Rightarrow$$

$$|a_{n+p}-a_n-l\,(b_{n+p}-b_n)|<\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=1}^{n+p-1}|b_{i+1}-b_i|<\varepsilon\,|b_{n+p}|\,,\quad\forall n\geq m,p\geq 1.$$

Însă, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există un şir crescător de numere naturale $(p\,(k))_{k\geq 1}$ astfel încât $\left|b_{n+p(k)}\right|\leq|b_n|$, $\forall k\geq 1$, deci putem presupune că $|b_{n+p}|\leq|b_n|$, $\forall n\geq m$, $p\geq 1$. Obţinem astfel $|a_{n+p}-a_n-l\,(b_{n+p}-b_n)|<\varepsilon\,|b_n|$, $\forall n\geq m$, $p\geq 1$. Trecând la limită, după $p\to\infty$, obţinem $|a_n-lb_n|<\varepsilon\,|b_n|\Leftrightarrow\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon$, $\forall n\geq m$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Corolarul 2. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt şiruri de numere reale astfel încât:* *i)* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, *ii)* *şirul* $(|b_n|)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător,* *iii)* *şirul* $\left(\frac{|b_{n+1}-b_n|}{|b_{n+1}|-|b_n|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit,* *iv)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l\in\mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Observaţii. *i)* Dacă în cele două teoreme şi corolare înlocuim $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $((-1)^n\,a_n)_{n\geq 1}$ şi, respectiv, $((-1)^n\,b_n)_{n\geq 1}$ obţinem că, pe lângă celelalte ipoteze, din mărginirea şirului $\left(\frac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}+b_i|\right)_{n\geq 1}$ respectiv $\left(\frac{|b_{n+1}+b_n|}{|b_{n+1}|-|b_n|}\right)_{n\geq 1}$ şi din $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_n}{b_{n+1}+b_n}=l\in\mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

ii) Teorema reciprocă 3 poate fi îmbunătăţită cerând în locul ipotezei *i)* ca şirul $\left(\frac{|b_{n+1}|+|b_n|}{|b_{n+1}-b_n|}\right)_{n\geq 1}$ să fie mărginit. Într-adevar pentru $\varepsilon>0$ avem $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-l\right|<\varepsilon\frac{|b_{n+1}|+|b_n|}{|b_{n+1}-b_n|}$, $\forall n\geq m$.

iii) Din demonstraţiile date, şi din enunţurile teoremelor şi corolarelor, este evident că ele rămân valabile şi în ipoteza că $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere complexe. De fapt rezultatele pot fi extinse şi în cadrul mult mai larg al algebrelor normate cu unitate; enunţurile rezultatelor de mai sus se adaptează cu uşurinţă, iar demonstraţiile se fac cu aceleaşi argumente.

3. Aplicaţii.

Problema 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in (1,\infty)$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limită dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *are limită, caz în care avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1}\lim\limits_{n\to\infty}(u_n x_{n+1} - x_n)$.

Indicaţie. Se aplică Teoremele 1 şi 3 şirurilor $a_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} x_n$ şi $b_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1}$.

Folosind Corolarul 1 putem extinde acest rezultat şi pentru valori negative ale lui u, pierzând însă cazul limitelor infinite, ca mai jos:

Problema 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$*,* $|u| > 1$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergnt dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1}\lim\limits_{n\to\infty}(u_n x_{n+1} - x_n)$.

Observaţie. Rezultatul ramâne valabil dacă şirurile ce intervin în enunţ sunt şiruri de numere complexe. Următoarea problemă ne prezintă în ce condiţii rezultatul anterior rămâne valabil în cazul $|u| < 1$.

Problema 3. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $(x_n)_{n\geq 1}$ *să fie mărginit iar* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$*,* $|u| < 1$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{u-1}\lim\limits_{n\to\infty}(u_n x_{n+1} - x_n)$.

Indicaţie. Se aplică Corolarul 2 şirurilor $a_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} x_n$ şi $b_n = u_1 u_2 \cdots u_{n-1}$.

Din nou facem observaţia că rezultatul rămâne valabil şi pentru şiruri de numere complexe. Este evident că ţinând seama de observaţia *i*) rezultatele anterioare rămân valabile dacă înlocuim $u_n x_{n+1} - x_n$ cu $u_n x_{n+1} + x_n$ şi $u-1$ cu $u+1$.

Toate acestea pot fi restrânse în

Problema 4. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir mărginit de numere complexe, iar* $(u_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(v_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri convergente de numere complexe astfel încât* $\left|\lim\limits_{n\to\infty} u_n\right| \neq \left|\lim\limits_{n\to\infty} v_n\right|$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} + v_n x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(u_n x_{n+1} + v_n x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Problema următoare este demonstrată în [**4**] şi generalizează Problema 2.

Problema 5. *Fie $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ şi $(x_n)_{n\geq k}$ un şir de numere reale cu proprietatea că şirul $(y_n)_{n\geq k}$, $y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k}$, este convergent. Dacă polinomul $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$ are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul $(x_n)_{n\geq k}$ este convergent.*

Indicaţie. Demonstraţia se face prin inducţie după k, primul pas al inducţiei reducându-se la: $|\lambda| < 1$ şi $(x_{n+1} - \lambda x_n)_{n\geq k}$ convergent $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\geq k}$ convergent, adică un caz particular al Problemei 2.

Am văzut însă că dacă cerem mărginirea lui $(x_n)_{n\geq k}$, atunci afirmaţia anterioară rămâne adevărată pentru $|\lambda| \neq 1$ şi, prin urmare, teorema rămâne valabilă dacă rădăcinile polinomului sunt în modul diferite de unitate. Obţinem astfel următoarea generalizare:

Problema 6. *Fie $\left(a_n^{(0)}\right)_{n\geq 1}$, $\left(a_n^{(1)}\right)_{n\geq 1}, \ldots,$ $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$, $k+1$ şiruri de numere complexe, convergente respectiv către $a^{(0)}$, $a^{(1)}, \ldots,$ $a^{(k)}$, şi astfel încât rădăcinile polinomului $a^{(0)}x^k + a^{(1)}x^{k-1} + \cdots + a^{(k)}$ să fie în modul diferite de unitate. Atunci, un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $\left(a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}\right)_{n\geq k+1}$ este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}\right)}{a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(k)}}.$$

Demonstraţie. Dacă $y_n = a_n^{(0)}x_n + a_n^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a_n^{(k)}x_{n-k}$ şi $z_n = a^{(0)}x_n + a^{(1)}x_{n-1} + \cdots + a^{(k)}x_{n-k}$ atunci, cum $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0$. Cum însă $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent rezultă că $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi conform problemei precedente (care este valabilă şi pentru şiruri de numere complexe) şi observaţiei făcute, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent iar relaţia finală este evidentă.

Problema 7. (**Jensen**) *Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât: seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este convergentă, şirul $\left(\dfrac{|y_1| + \cdots + |y_n|}{|y_1 + \cdots + y_n|}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = l$.*

Bibliografie

1. **R. Cristescu** - *Analiză functională*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucuresti, 1979.
2. **D.M. Batineţu** - *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979.
3. **D.M. Bătineţu, I.V. Maftei, I.M. Stancu-Minasian** - *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucuresti, 1981.
4. **O. Mayer** - *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Academiei, 1981.
5. **D. Miheţ** - *Despre calculul unor limite de şiruri*, R.M.T. nr. 2/1990.
6. **D.-Şt. Marinescu , V. Cornea** - *In legatură cu o problemă din G.M.A.*, G.M.-A nr. 3/2005.
7. **D. Miheţ, M. Piticari** - *O problemă de convergenţă*, G.M.-A nr. 1/1990.