Tehnici de stabilire a unor inegalităţi geometrice

***I. M. MAFTEI*[1]*, Mihai HAIVAS*[2]**

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi T. În diverse moduri putem trece de la T la un triunghi *derivat* T', lungimile laturilor acestuia din urmă fiind expresii în a, b, c (rezultate într-un mod indicat). Dacă aplicăm triunghiului T' inegalităţi geometrice valabile în orice triunghi (de exemplu, $R \geq 2r$, $3\sqrt{3}r \leq p \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$, $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$ etc.), vom obţine, cu oarecare şansă, noi inegalităţi interesante. Ne propunem să ilustrăm mai jos acest procedeu.

Câteva triunghiuri derivate ale lui T sunt date de următoarea

Lemă. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci*

1) *pentru orice $x \geq 0$, numerele $l_1 = ax+b$, $l_2 = bx+c$, $l_3 = cx+a$ sunt, de asemenea, lungimile laturilor unui triunghi;*

2) *pentru orice $\alpha \in [0,1]$, numerele $L_1 = a^\alpha$, $L_2 = b^\alpha$, $L_3 = c^\alpha$ sunt lungimile laturilor unui triunghi;*

c) *pentru orice $x \geq 0$ şi $\alpha \in [0,1]$, $(ax+b)^\alpha$, $(bx+c)^\alpha$ şi $(cx+a)^\alpha$ sunt lungimile laturilor unui trinughi.*

Demonstraţie. 1) Să arătăm, de exemplu, că $l_1 + l_2 > l_3$. Avem $(ax+b)+(bx+c) > (cx+a) \Leftrightarrow (a+b-c)\,x + (b+c-a) > 0$, ceea ce are loc $\forall x \geq 0$.

2) Considerând $c = \max\{a,b,c\}$, avem de arătat că $L_1 + L_2 > L_3$, adică $a^\alpha + b^\alpha > c^\alpha$. Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(\alpha) = \left(\dfrac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\dfrac{b}{c}\right)^\alpha$ este descrescătoare; deci $f(\alpha) \geq f(1)$, $\forall \in [0,1]$. Dar $f(1) = \dfrac{a+b}{c} > 1$. Deci $f(\alpha) > 1$, $\forall \alpha \in [0,1]$, adică $a^\alpha + b^\alpha > c^\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

3) Rezultă combinând punctele precedente.

Propoziţie. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate $\forall x \geq 0$ avem următoarele inegalităţi:*

$$(a+b+c)^3(x+1)^3 \geq 27\left[(a-b)(1-x)+c(1+x)\right]\left[(b-c)(1-x)+a(1+x)\right]\cdot \\ \cdot\left[(c-a)(1-x)+b(1+x)\right], \tag{1}$$

$$\frac{(a+b-c)\,x+b+c-a}{\sqrt{(ax+b)(bx+c)}} + \frac{(b+c-a)\,x+c+a-b}{\sqrt{(bx+c)(cx+a)}} + \frac{(c+a-b)\,x+a+b-c}{\sqrt{(cx+a)(ax+b)}} \leq 3, \tag{2}$$

$$\frac{(b+c)\,x+a+c}{\sqrt{ax+b}} + \frac{(c+a)\,x+b+a}{\sqrt{bx+c}} + \frac{(a+b)\,x+c+b}{\sqrt{cx+a}} \geq \\ \geq 2\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{bx+c}+\sqrt{cx+a}\right), \tag{3}$$

Demonstraţie. 1) Fie T_1 triunghiul cu lungimile laturilor $l_1 = ax+b$, $l_2 = bx+c$ şi $l_3 = cx+a$ $(x \geq 0)$. Considerăm subînţelese notaţiile: p_1, r_1, R_1, S_1 relativ la T_1.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Sf. Sava", Bucureşti
[2] Cercetător, Academia Română, Inst. Cerc. Economice "Gh. Zane", Iaşi

Inegalitatea (1) se obţine aplicând triunghiului T_1 inegalitatea $p \geq 3\sqrt{3}r$. Într-adevăr, $p_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3) = \frac{1}{2}(a+b+c)(x+1)$, iar, cu formula lui Heron pentru arie,

$$r_1^2 = \frac{S_1^2}{p_1^2} = \frac{(a+b+c)(x+1)}{4(a+b+c)^2(x+1)^2}\cdot$$

$$\cdot\left[(b+c-a)x+c+a-b\right]\left[(c+a-b)x+a+b-c\right]\left[(a+b-c)x+b+c-a\right] =$$

$$= \frac{\left[(a-b)(1-x)+c(1+x)\right]\left[(b-c)(1-x)+a(1+x)\right]\left[(c-a)(1-x)+b(1+x)\right]}{4(a+b+c)(x+1)}.$$

Introducând în $p_1^2 \geq 27r_1^2$, vom obţine inegalitatea (1).

2) Considerăm triunghiul T_2 având lungimile laturilor $u = \sqrt{ax+b}$, $v = \sqrt{bx+c}$, $w = \sqrt{cx+a}$, $x \geq 0$ (Lema, punctul 3) cu $\alpha = \frac{1}{2}$). Atunci

$$\cos A_2 = \frac{v^2+w^2-u^2}{2vw} = \frac{(b+c-a)x+c+a-b}{2\sqrt{(bx+c)(cx+a)}},$$

$$\cos B_2 = \frac{(c+a-b)x+a+b-c}{2\sqrt{(cx+a)(ax+b)}}, \quad \cos C_2 = \frac{(a+b-c)x+b+c-a}{2\sqrt{(ax+b)(bx+c)}}.$$

Cum $\cos A_2 + \cos B_2 + \cos C_2 \leq 3$, obţinem imediat (2).

3) Pentru medianele m_u, m_v, m_w ale triunghiului T_2 avem:

$$m_u^2 = \frac{2\left(v^2+w^2\right)-u^2}{4} = \frac{(2b+2c-a)x+2c+2a-b}{4},$$

$$m_v^2 = \frac{(2c+2a-b)x+2a+2b-c}{4}, \quad m_w^2 = \frac{(2a+2b-c)x+2b+2c-a}{4}.$$

Ţinând seama de acestea şi utilizând cunoscuta inegaliate $\sum \frac{m_a^2}{a} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$ în triunghiul T_2, obţinem (3).

Observaţie. Avem egalitate în (1), (2), (3) doar pentru triunghiul echilateral.

Cazuri particulare. Dacă luăm $x = 0$ sau $x = 1$ în (1), (2), (3), obţinem inegalităţile (mereu în ipoteza că a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi):

$$(a+b+c)^3 \geq 27(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b), \tag{1_0}$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc, \tag{1_1}$$

$$\sqrt{a}(b+c-a)+\sqrt{b}(c+a-b)+\sqrt{c}(a+b-c) \leq 3\sqrt{abc}, \tag{2_0}$$

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}, \tag{2_1}$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right), \tag{3_0}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right). \tag{3_1}$$

Observaţie. Se pot obţine cu acest procedeu şi alte inegalităţi interesante. Sugerăm cititorului să aplice procedeul triunghiului cu laturile $\left(ax^2+bx+c\right)^\alpha$, $\left(bx^2+cx+a\right)^\alpha$, $\left(cx^2+ax+b\right)^\alpha$, $x \geq 0$ şi $\alpha \in [0,1]$.