Asupra unei note din revista "Recreaţii matematice"

Maria BĂTINEŢU-GIURGIU*[1]*,
***D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU*[2]**

În "Recreaţii Matematice", an. V, nr. 2/2003 este publicată o Notă matematică interesantă [**5**], pentru care eleva **Oana Cârjă** a primit premiul *Fundaţiei "Poiana"* pe anul 2003. Ne propunem să întărim şi să extindem rezultatele acestei Note.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = x \in \mathbb{R}_+^*$. Atunci, există şi limitele:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n} = x \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x_n}\cdot\frac{n+1}{n} = 1.$$

Dacă, însă, $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = t \in \mathbb{R}_+^*$, nu rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$, după cum arată şirul $x_n = n+(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Teorema 1. *Fie şirul de numere reale strict pozitive* $(x_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x} = x \in \mathbb{R}_+^*$. *Atunci,* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n-1}-x_n) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = x\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right). \tag{1}$$

Demonstraţia I (D. M. Bătineţu-Giurgiu). Notând $u_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$x_{n+1}-x_n = x_n(u_n-1) = \frac{x_n}{n}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln(u_n)^n, \quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 1$ şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-1}{\ln u_n} = 1$. Dacă $\exists y = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$, trecând la limită în (2), obţinem: $y = x\cdot\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^n\right)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^n = e^{y/x}$. Reciproc, dacă $\exists z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$, utilizând din nou (2), obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = x\cdot\ln z$.

Demonstraţia a II-a (M. Ţena). Se procedează la fel, în locul relaţiei (2) folosind formula

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{x_{n+1}-x_n}}\right]^{\frac{n}{x_n}(x_{n+1}-x_n)}, \quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Fie şirurile de numere reale strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = b \in \mathbb{R}_+^*$ şi există $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{n} = y \in \mathbb{R}_+^*$. Vom numi *şir Lalescu* definit de $(x_n)_{n\geq 1}$

[1] Prof., dr., Academia Tehnică Militară, Bucureşti
[2] Prof., Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

şi ponderat cu $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ şirul $(L_n)_{n\geq 2}$ dat de

$$L_n = x_{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}y_{n+1}} - x_n \sqrt[n]{b_n y_n}, \quad n \geq 2. \tag{4}$$

Teorema 2. *Şirul Lalescu $(L_n)_{n\geq 2}$ definit prin (4) este convergent dacă şi numai dacă şirul $\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.*

Demonstraţie. Notând $v_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}y_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n y_n}}$, $n \geq 2$, vom avea:

$$L_n = x_n \sqrt[n]{b_n y_n}\,(v_n - 1) = \frac{x_n}{n} \sqrt[n]{b_n y_n} \frac{v_n - 1}{\ln v_n} \ln (v_n)^n, \quad n \geq 2. \tag{5}$$

În ipotezele noastre, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = a$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$, avem şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = 1$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$. Din faptul că

$$(v_n)^n = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{b_n} \frac{y_{n+1}}{y_n} \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \sqrt[n+1]{y_{n+1}}}, \quad n \geq 2,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n)^n = b \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

Dacă $\exists z = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$, trecând la limită în (5), obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = ax \ln (bz)$. Reciproc, dacă $\exists c = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$, din (5) rezultă că avem $c = ax \ln \left(\lim\limits_{n\to\infty} (v_n)^n\right)$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n)^n = e^{\frac{c}{ax}}$ şi, în final, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \frac{1}{b} e^{\frac{c}{ax}}$.

Aplicaţii ale Teoremei 1. 1) Luăm $x_n = \sqrt[n]{n!}$, $\forall n \geq 2$ .Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e$, rezultă, conform Teoremei 1, că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}$ (*limita şirului lui Traian Lalescu*).

2) Luând $x_n = n\sqrt[n]{n}$, $\forall n \geq 2$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right) = e.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \left((n+1) \sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}\right) = 1$ (*limita şirului lui Romeo T. Ianculescu*).

3) Dacă $x_n = \sqrt[n]{(2n-1)!!}$, $\forall n \geq 2$, atunci, după calcule de rutină, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{2}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = e$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!} - \sqrt[n]{(2n-1)!!}\right) = \frac{2}{e}$ (*D.M. Bătineţu-Giurgiu, C:905,* G.M.-5/1989).

4) Fie $x_n = \sqrt[n]{d_1 d_3 \cdots d_{2n-1}}$, $\forall n \geq 2$, unde $d_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (d_{n+1} - d_n) = d \in \mathbb{R}_+^*$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{d_1d_3\cdots d_{2n-1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1\cdots d_{2n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{d_1\cdots d_{2n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{2n+1}}{2n+1}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2d}{e},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}{d_1d_3\cdots d_{2n-1}}\frac{1}{\sqrt[n+1]{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d_{2n+1}}{n+1}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{d_1d_3\cdots d_{2n+1}}}=2d\frac{e}{2d}=e.$$

Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\frac{2d}{e}\ln e=\frac{2d}{e}$ (*D.M. Bătineţu-Giurgiu*, *C:1024*, G.M. - 2-3/1992).

Aplicaţii ale Teoremei 2. 1) Date $c_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\geq 1$, să notăm $c_1!=c_1$, $c_{n+1}!=c_{n+1}\cdot c_n!$, $\forall n\geq 1$. În Teorema 2 considerăm $y_n=1$, $\forall n\geq 1$ şi $x_n=\sqrt[n]{c_n!}$, $\forall n\geq 2$, unde $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n)=c\in\mathbb{R}_+^*$. Ca mai sus, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{c}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=e$. În consecinţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{c_{n+1}!a_{n+1}}-\sqrt[n]{c_n!b_n}\right)=\frac{ac}{e}\ln(be)$. (*Teorema 3* din [**6**]).

2) Fie $c_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\geq 1$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n)=c\in\mathbb{R}_+^*$. Considerând $x_n=y_n=c_n$, $\forall n\geq 1$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}\sqrt[n+1]{a_{n+1}x_{n+1}}-x_n\sqrt[n]{b_nx_n}\right)=$ $=ac\ln(be)$ (*Teorema 4* din [**6**]).

3) Pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$, să considerăm $x_n=n$, $y_n=1$, $a_n=b_n=\frac{n^n}{n!}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=e$ şi, deci, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e$ (*D.M. Bătineţu-Giurgiu*, *C:890*, G.M.-4/1989).

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, 1979.
2. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Şiruri Lalescu*, R.M.T., 1-2/1989, 33-36.
3. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Ponderarea unor şiruri*, G.M., 2-3/1992, 46-49.
4. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *Asupra calculării unor limite de şiruri*, RecMat-1/2007, 22-24.
5. **O. Cârjă** - *Un procedeu de calcul al limitelor unor şirui de forma* $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$, RecMat-2/2003, 23-24.
6. **A. Stroe** - *Asupra unei clase de şiruri*, G.M., seria A, 3/2007, 217-227.
7. **M. Ţena** - *O altă soluţie a Problemei 579 din G.M.*, Revista "Licăriri" a Liceului "N. Bălcescu" din Craiova, 1978, 13-14.