O clasă de inegalităţi

Mihai DICU, Lucian TUŢESCU[1]

Propoziţia 1. *Fie numerele* $k, m \in \mathbb{N}^*$.

$1a$) *Dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k} + y^{2m-k} + z^{2m-k});$$

$1b$) *Dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k+1} + y^{2m+2k+1} + z^{2m+2k+1} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k+1} + y^{2m-k+1} + z^{2m-k+1});$$

$1c$) *Dacă* $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k-1}\sqrt{yz} + y^{2m-k-1}\sqrt{xz} + z^{2m-k-1}\sqrt{xy}).$$

Demonstraţie. $1a$) Avem

$$\begin{gathered}(x^{2m} - y^{2m})(x^{2k} - y^{2k}) \geq 0, \quad (y^{2m} - z^{2m})(y^{2k} - z^{2k}) \geq 0, \\ (z^{2m} - x^{2m})(z^{2k} - x^{2k}) \geq 0\end{gathered} \tag{1a}$$

şi apoi

$$x^{2m+2k} + y^{2m+2k} \geq x^{2k}y^{2m} + x^{2m}y^{2k} \tag{1}$$

$$y^{2m+2k} + z^{2m+2k} \geq y^{2k}z^{2m} + y^{2m}z^{2k} \tag{2}$$

$$z^{2m+2k} + x^{2m+2k} \geq x^{2k}z^{2m} + x^{2m}z^{2k} \tag{3}$$

Adunând (1), (2), (3), punem sub forma

$$\begin{gathered}2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k}) \geq (x^{2m}y^{2k}+x^{2m}z^{2k})+(x^{2k}y^{2m}+y^{2m}z^{2k})+(x^{2k}z^{2m}+y^{2k}z^{2m}) \\ \geq 2\left|x^{2m}y^k z^k\right| + 2\left|x^k y^{2m} z^k\right| + 2\left|x^k y^k z^{2m}\right| \geq 2x^k y^k z^k (x^{2m-k} + y^{2m-k} + z^{2m-k}),\end{gathered}$$

după aplicarea inegalităţii mediilor pentru fiecare paranteză în parte.

$1b$) La fel ca la punctul a) pentru $x, y, z \geq 0$ se pleacă de la inegalităţile:

$$\begin{gathered}(x^{2m+1} - y^{2m+1})(x^{2k} - y^{2k}) \geq 0, \quad (y^{2m+1} - z^{2m+1})(y^{2k} - z^{2k}) \geq 0, \\ (z^{2m+1} - x^{2m+1})(z^{2k} - x^{2k}) \geq 0.\end{gathered} \tag{1b}$$

După adunare, grupăm sub forma

$$\begin{gathered}2(x^{2m+2k+1} + y^{2m+2k+1} + z^{2m+2k+1}) \geq \\ \geq (x^{2m+1}y^{2k} + x^{2m+1}z^{2k}) + (x^{2k}y^{2m+1} + y^{2m+1}z^{2k}) + (x^{2k}z^{2m+1} + y^{2k}z^{2m+1}).\end{gathered}$$

După aplicarea inegalităţii mediilor, pentru fiecare paranteză, se găseşte inegalitatea $1b$).

$1c$) Pentru $x, y, z \geq 0$ se folosesc inegalităţile:

$$\begin{gathered}(x^{2m-1} - y^{2m-1})(x^{2k+1} - y^{2k+1}) \geq 0, \quad (y^{2m-1} - z^{2m-1})(y^{2k+1} - z^{2k+1}) \geq 0, \\ (z^{2m-1} - x^{2m-1})(z^{2k+1} - x^{2k+1}) \geq 0\end{gathered} \tag{1c}$$

şi se parcurg aceleaşi etape ca la punctul a) şi b), grupând corespunzător.

Observaţia 1. Se vede uşor că fiecare dintre inegalităţile ($1a$), ($1b$), ($1c$) este mai tare decât inegalitatea mediilor.

---

[1] Profesori, C.N. "Fraţii Buzeşti" Craiova

Cazuri particulare

$1a_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k=n \in \mathbb{N}$, atunci cu $k+n$ par şi $x,y,z \in \mathbb{R}$ avem

$$x^{3k+n}+y^{3k+n}+z^{3k+n} \geq x^k y^k z^k (x^n+y^n+z^n).$$

$1a_2$) Dacă în aceasta particularizăm $k=1$, se obţine

$$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3} \geq xyz(x^n+y^n+z^n),$$

cu n număr natural impar şi x, y, z numere reale oarecare.

Concursul "Gheorghe Dumitrescu", 2006

$1a_3$) Să remarcăm câteva cazuri particulare ale ultimei inegalităţi:

$1a_{31}$) $\quad x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z), \quad x,y,z \in \mathbb{R};$

$1a_{32}$) $\quad x^6+y^6+z^6 \geq xyz(x^3+y^3+z^3), \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$

Concursul revistei "Arhimede", 2005

$1b_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k+1=n \in \mathbb{N}$, atunci cu $k+n$ impar şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$ avem

$$x^{3k+n}+y^{3k+n}+z^{3k+n} \geq x^k y^k z^k (x^n+y^n+z^n).$$

$1b_2$) Dacă în aceasta particularizăm $k=1$, se obţine

$$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3} \geq xyz(x^n+y^n+z^n),$$

cu n număr natural par şi x, y, z numere reale pozitive oarecare.

Concursul "Gheorghe Dumitrescu", 2006

$1b_{21}$) pentru $n=0$ şi x, y, z numere reale pozitive oarecare se obţine

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz,$$

adică inegalitatea mediilor pentru trei numere.

$1b_{22}$) pentru $n=2$ şi x, y, z numere reale pozitive, se obţine

$$x^5+y^5+z^5 \geq xyz(x^2+y^2+z^2).$$

$1c_1$) Dacă luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $2m-k-1=n \in \mathbb{N}$, atunci, cu $k+n$ impar şi $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x^{3k+n+1}+y^{3k+n+1}+z^{3k+n+1} \geq x^k y^k z^k (x^n\sqrt{yz}+y^n\sqrt{xz}+z^n\sqrt{xy}).$$

Propoziţia 2. *Fie numerele* $k,m \in \mathbb{N}^*$.

$2a$) *Dacă* $x,y,z \in \mathbb{R}$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k (x^{2m-k}+y^m z^{m-k}+z^m y^{m-k});$$

$2b$) *Dacă* $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k+1}+y^{2m+2k+1}+z^{2m+2k+1} \geq x^k y^k z^k \left(x^{2m-k+1}+y^m z^{m-k}\sqrt{yz}+y^{m-k}z^m\sqrt{yz}\right);$$

$2c$) *Dacă* $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k} \geq x^k y^k z^k \left(x^{2m-k-1}\sqrt{yz}+y^m z^{m-k}\sqrt{\frac{x}{z}}+y^{m-k}z^m\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Demonstraţie. $2a$) Adunăm (1), (2), (3) şi grupăm termenii din membrul drept sub forma

$$2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k}) \geq (x^{2m}y^{2k}+x^{2m}z^{2k})+(x^{2k}y^{2m}+y^{2k}z^{2m})+(x^{2k}z^{2m}+y^{2m}z^{2k}).$$

Aplicând inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză, obţinem:

$$2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k})\geq 2\left|x^{2m}y^kz^k\right|+2\left|x^ky^{m+k}z^m\right|+2\left|x^ky^mz^{m+k}\right|\geq$$
$$\geq 2\left|x^{2m}y^kz^k\right|+2\left|x^ky^{m+k}z^m\right|+2\left|x^ky^mz^{m+k}\right|\geq$$
$$\geq 2x^ky^kz^k(x^{2m-k}+y^mz^{m-k}+z^my^{m-k}).$$

$2b$) Plecând de la ($1b$), după adunare, grupăm astfel:

$$2(x^{2m+2k+1}+y^{2m+2k+1}+z^{2m+2k+1})\geq$$
$$\geq (x^{2m+1}y^{2k}+x^{2m+1}z^{2k})+(x^{2k}y^{2m+1}+y^{2k}z^{2m+1})+(x^{2k}z^{2m+1}+z^{2k}y^{2m+1})\geq$$
$$\geq 2(x^{2m+1}y^kz^k+x^ky^{m+k}z^m\sqrt{yz}+x^ky^mz^{m+k}\sqrt{yz})=$$
$$=2x^ky^kz^k(x^{2m-k+1}+y^mz^{m-k}\sqrt{yz}+y^{m-k}z^m\sqrt{yz}).$$

$2c$) Folosind ($1c$), după adunare, termenii se grupează astfel:

$$2(x^{2m+2k}+y^{2m+2k}+z^{2m+2k})\geq$$
$$\geq(x^{2m-1}y^{2k+1}+x^{2m-1}z^{2k+1})+(x^{2k+1}y^{2m-1}+y^{2k+1}z^{2m-1})+(x^{2k+1}z^{2m-1}+y^{2m-1}z^{2k+1})\geq$$
$$\geq 2\left(x^{2m-1}y^kz^k\sqrt{yz}+x^ky^{m+k}z^m\sqrt{\frac{x}{z}}+x^ky^mz^{m+k}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)=$$
$$=2x^ky^kz^k\left(x^{2m-k-1}\sqrt{yz}+y^mz^{m-k}\sqrt{\frac{x}{z}}+y^{m-k}z^m\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Observaţia 2. Se vede uşor că fiecare dintre inegalităţile $2a$), $2b$), $2c$) este mai tare decât inegalitatea mediilor.

Observaţia 3. În cazul în care $x,y,z\in\mathbb{R}_+$ inegalitatea $1a$) este mai tare decât $2a$) pentru $m>k$, respectiv, mai slabă în caz contrar, pentru că
$x^{2m-k}+y^{2m-k}+z^{2m-k}\geq x^{2m-k}+y^mz^{m-k}+z^my^{m-k}\Leftrightarrow(y^m-z^m)(y^{m-k}-z^{m-k})\geq 0.$

Cazuri particulare

$2a_1$) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}$, avem

$$x^{6k}+y^{6k}+z^{6k}\geq x^ky^kz^k(x^{3k}+y^{2k}z^k+z^ky^{2k}).$$

$2a_2$) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}$, avem

$$x^{6m}+y^{6m}+z^{6m}\geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}\left(1+\left(\frac{y}{z}\right)^m+\left(\frac{z}{y}\right)^m\right).$$

$2b_1$) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6k+1}+y^{6k+1}+z^{6k+1}\geq x^ky^kz^k(x^{3k+1}+y^{2k}z^k\sqrt{yz}+y^kz^k\sqrt{yz}).$$

$2b_2$) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6m+1}+y^{6m+1}+z^{6m+1}\geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}(x+y^mz^{-m}\sqrt{yz}+y^{-m}z^m\sqrt{yz}).$$

$2c_1$) Pentru $m=2k$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6k}+y^{6k}+z^{6k}\geq x^ky^kz^k\left(x^{3k-1}\sqrt{yz}+y^{2k}z^k\sqrt{\frac{x}{z}}+y^kz^{2k}\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

$2c_2$) Pentru $k=2m$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}_+$, avem

$$x^{6m}+y^{6m}+z^{6m}\geq x^{2m}y^{2m}z^{2m}\left(x^{-1}\sqrt{yz}+y^mz^{-m}\sqrt{\frac{x}{z}}+y^{-m}z^m\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$