Limita unor şiruri de numere reale

Gheorghe COSTOVICI[1]

Prezentăm mai jos o generalizare directă a Propoziţiei din [**1**] şi câteva aplicaţii.

Propoziţie. *Fie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă, descrescătoare şi cu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$, F o primitivă a lui f pe $(0,\infty)$ şi numerele $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} [F(qn) - F(pn)] = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci avem şi*

$$\lim_{n\to\infty} [f(pn+1) + f(pn+2) + \cdots + f(qn)] = l. \tag{1}$$

Demonstraţie. Să considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - F(n)$. Procedând ca în [**1**], arătăm că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit.

Într-adevăr, cu teorema de medie a lui Lagrange, avem

$x_{n+1} - x_n = f(n+1) - [F(n+1) - F(n)] = f(n+1) - F'(c_n) = f(n+1) - f(c_n) \leq 0$ (unde $n < c_n < n+1$). Deci, $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \geq 1$.

Pe de altă parte, cu aceeaşi teoremă de medie, avem $F(k+1) - F(k) = f(c_k) \leq f(k)$ $(k < c_k < k+1)$ şi, sumând pentru $k = \overline{1,n}$, obţinem

$F(n+1) - F(1) \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, $n \geq 2 \Leftrightarrow x_{n+1} \geq f(n+1) - F(1)$, $n \geq 2$.

De aici şi din faptul că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este mărginit (consecinţă a condiţiei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$), rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Se constată uşor că

$$f(pn+1) + f(pn+2) + \cdots + f(qn) = x_{qn} - x_{pn} + [F(qn) - F(pn)], \ n \geq 1,$$

care, pentru $n \to \infty$, conduce la (1).

Observaţie. Propoziţia din [**1**] se obţine pentru $p = 1$ şi $q = 2$.

Calculul limitelor următoare devine simplu prin aplicarea acestei Propoziţii (lăsăm în seama cititorului verificarea condiţiilor de aplicare).

Exemple. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{pn+1} + \dfrac{1}{pn+2} + \cdots + \dfrac{1}{qn}\right) = \ln\dfrac{q}{p}$ $\quad \left(f(x) = \dfrac{1}{x}\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{(q-p)n} \dfrac{1}{1 + (pn+k)^2} = 0$ $\quad \left(f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{(q-p)n} \dfrac{1}{\sqrt{pn+k+1}} = \infty$.

4) $\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n} \operatorname{arctg}(pn+k) = \ln\dfrac{q}{p}$ $\quad (f(x) = \operatorname{arctg} x)$.

5) $\sum\limits_{k=1}^{(q-p)n} \dfrac{1}{(pn+k)\sqrt{(pn+k)^2+1}} = 0$ $\quad \left(f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Bibliografie

1. C. Chiser - *O metodă elegantă de calcul al unor limite de şiruri*, R.M.T.-3/2007, 9-10.

[1] Conf. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi"