Despre numerele reale algebrice

Silviu BOGA[1]

În cele ce urmează, cadrul de studiu este inelul polinoamelor cu coeficienţi raţionali în care s-au definit conceptul de divizibilitate, cel mai mare divizor comun a două polinoame, număr real algebric şi polinom minimal asociat unui număr real algebric. Rezultată imediat din algoritmul lui Euclid şi deosebit de utilă în raţionamentele ce vor urma este proprietatea: $\forall f, g \in \mathbb{Q}[X]\ \exists u, v \in \mathbb{Q}[X]$ încât $u \cdot f + v \cdot g = (f; g)$.

Propoziţia 1. *Dacă două polinoame $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ au o rădăcină comună $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci $(f; g) \neq 1$.*

Demonstraţie. Presupunând prin absurd că $(f; g) = 1$, conform proprietăţii anterior enunţată, $\exists u, v \in \mathbb{Q}[X]$ încât $u \cdot f + v \cdot g = 1$. În acest caz, cum $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, vom obţine că $(u \cdot f + v \cdot g)(\alpha) = 1$, deci $0 = 1$, contradicţie.

Propoziţia 2. *Dacă două polinoame $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ au o rădăcină comună $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $h = (f; g)$, atunci $h(\alpha) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $f = \tilde{f} \cdot h$, $g = \tilde{g} \cdot h$ şi atunci, cum $(\tilde{f}; \tilde{g}) = 1$, $\exists u, v \in \mathbb{Q}[X]$ încât $u \cdot \tilde{f} + v \cdot \tilde{g} = 1$ şi astfel $(u \cdot \tilde{f} + v \cdot \tilde{g}) \cdot h = h \Rightarrow u \cdot f + v \cdot g = h \Rightarrow (u \cdot f + v \cdot g)(\alpha) = h(\alpha) \Rightarrow h(\alpha) = 0$.

Propoziţia 3. *Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^p + a_1 X^{p-1} + a_2 X^{p-2} + \cdots + a_{p-1} X + a_p$, pentru care*

(i) f este de grad impar;

(ii) f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$;

(iii) f are o rădăcină $\alpha \in \mathbb{R}$ de semn contrar cu termenul liber $a_p \neq 0$;

(iv) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$.

În condiţiile (i) – (iv), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, α^n este număr real iraţional.

Demonstraţie. Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că termenul liber este pozitiv. Din cele menţionate, evident că $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În acest caz, dacă pentru un anume $n \in \mathbb{N}^*$ ar avea loc $\alpha^n = a \in \mathbb{Q}$, polinomul $g = X^n - a \in \mathbb{Q}[X]$ având o rădăcină comună cu polinomul f nu va fi prim cu f şi, cum f este ireductibil, ar rezulta $g \vdots f$. Dar rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ ale polinomului g au $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = \sqrt[n]{|a|}$ şi astfel, din $g \vdots f$, ar rezulta că şi rădăcinile polinomului f sunt toate de acelaşi modul, implicit $|\alpha| = \sqrt[p]{|a_p|}$ şi, din condiţia (iii), $\alpha = -\sqrt[p]{a_p}$. În această situaţie, din exprimarea $f = (X^p + a_p) + X\left(a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdots + a_{p-1}\right)$ se va deduce că polinoamele $v = X^p + a_p$ şi $w = a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdots + a_{p-1}$ au rădăcină comună α. Dar $w = a_1 X^{p-2} + a_2 X^{p-3} + \cdots + a_{p-1}$ este neconstant conform cu (i) şi (iv) şi, datorită rădăcinii comune, v şi w nu ar fi prime între ele, ceea ce ar face ca f să nu fie ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, în contradicţie cu (ii). Rămâne că $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Observaţie. Chestiuni de genul: Dacă $x \in \mathbb{R}$ verifică $x^3 + 2x + 2 = 0$, să se arate că $x^{2006} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, imediat justificate de Propoziţia 3, apar în mai multe rânduri printre subiectele de bacalaureat, sesiunile 2006 şi 2007 (a se vedea [**1**]).

Urmând pas cu pas demonstraţia Propoziţiei 3 (adaptările necesare sunt evidente!) vom obţine imediat

[1] Profesor, Liceul "V. Alecsandri", Iaşi

Propoziţia 4. *Fie* $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_{p-1}X + a_p$, *pentru care*

(i) f *este de grad par;*

(ii) f *este ireductibil în* $\mathbb{Q}[X]$*;*

(iii) f *are o rădăcină* $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $a_p < 0$*;*

(iv) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$.

În condiţiile (i) – (iv), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, α^n *este număr real iraţional.*

Observaţie. Analog cu prima observaţie, prin Propoziţia 4 se demonstrează imediat afirmaţii de genul: Dacă $x \in \mathbb{R}$ verifică $x^4 + x^3 + x^2 + x = 2007$, să se arate că $x^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 5. *Dacă* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un număr real algebric şi există* $n \in \mathbb{N}^*$ *încât* $\alpha^n \in \mathbb{Q}$ *atunci* $n \,\vdots\, p$, *unde* $p = \text{grad } f_\alpha$, f_α *fiind polinomul minimal asociat lui* α (adică polinomul din $\mathbb{Q}[X]$ de grad minim şi care admite ca rădăcină α).

Demonstraţie. Fie $\alpha^n = a \in \mathbb{Q}$; atunci $g = X^n - a$ are rădăcină comună cu f_α, deci $(g; f_\alpha) = h \neq 1$. Dar f_α fiind polinom minimal, este ireductibil şi astfel $g \,\vdots\, f_\alpha$, de unde $n \,\vdots\, \text{grad } f_\alpha$.

Propoziţia 6. *Dacă* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un număr real algebric şi există* $n \in \mathbb{N}^*$ *încât* $\alpha^n \in \mathbb{Q}$, *atunci polinomul minimal asociat lui* α *este de forma* $f_\alpha = X^p - \alpha^p$, *unde* $p = \min\{n \mid \alpha^n \in \mathbb{Q}\}$.

Demonstraţie. În cazul $\alpha \in \mathbb{Q}$ se observă că $f_\alpha = X - \alpha$. În cazul $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, evident $\{n \mid \alpha^n \in \mathbb{Q}\} \neq \emptyset$ şi fie $f_\alpha = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_{p-1}X + a_p$ polinomul minimal al lui α. Cum $\alpha^n \in \mathbb{Q}$, conform propoziţiei anterioare $n \,\vdots\, p$ şi totodată $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deoarece în caz contrar f_α nu ar mai fi minimal. Dar în acest caz $n \geq p$ şi analog cu raţionamentul din propoziţiile anterioare $|\alpha| = \sqrt[p]{|a_p|}$, deci $|\alpha|^p = |a_p| \in \mathbb{Q}$. Astfel $\alpha^p \in \mathbb{Q}$ şi considerând $g = a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_{p-1}X + (a_p + \alpha^p)$, deducem că $g(\alpha) = f_\alpha(\alpha) = 0$ şi cum f_α este minimal, atunci $g = 0$, prin urmare $f_\alpha = X^p - \alpha^p$.

Observaţie. Conform ultimei propoziţii, orice rădăcină reală iraţională α a unui polinom $f \in \mathbb{Q}[X]$ ireductibil şi care nu este de forma $f = X^p - a$, are proprietatea $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Concluzie. Oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rădăcină a unui polinom ireductibil $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \cdots + a_{p-1}X + a_p$, are loc exact una din situaţiile:

a) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 \neq 0$ şi în acest caz $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{p-1}^2 = 0$ şi în acest caz $\alpha^n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*$ este nedivizibil prin p.

Bibliografie

1. http://www.subiecte2007.edu.ro – bacalaureat, subiecte M11, variantele 47 şi 84.

2. **C. Năstăsescu, C. Niţă** - *Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982.