O rafinare a inegalităţii dintre media aritmetică şi cea logaritmică

Mihail BENCZE[1]

Fie $0 < a < b$. Vom nota cu

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{şi} \qquad L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \tag{1}$$

media aritmetică şi, respectiv, media logaritmică. Se ştie [**1**] că

$$L(a,b) < A(a,b). \tag{2}$$

În această notă vom da o rafinare a acestei inegalităţi.

Teoremă. *Dacă* $0 < a < b$ *atunci avem inegalităţile*

$$L(a,b) < L\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big) < \Big[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\Big]^2 < A(a,b). \tag{3}$$

Demonstraţie. Inegalitatea din dreapta rezultă imediat:

$$A(a,b) > \Big[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\Big]^2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > \Big(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\Big)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0.$$

Pe de altă parte, $\Big[A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\Big]^2 = A\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big)$ şi aplicând (2) obţinem $A\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big) > L\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big)$, adică inegalitatea din mijloc.

Mai rămâne de demonstrat inegalitatea din stânga, care, cu notaţia $t = \frac{b}{a} > 1$, se scrie

$$\frac{\frac{t+1}{2} - \sqrt{t}}{\ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \ln\sqrt{t}} > \frac{t-1}{\ln t} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t}-1}{2\ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \ln t} > \frac{\sqrt{t}+1}{\ln t} \Leftrightarrow \sqrt{t}\ln t > \left(\sqrt{t}+1\right)\ln\frac{t+1}{2}.$$

Pentru a demonstra această nouă inegalitate folosim notaţiile $t = x^2$ şi $f(x) = 2x\ln x - (x+1)\ln\Big(\frac{x^2+1}{2}\Big)$. Atunci

$$f'(x) = 2\ln x - \Big(\frac{x^2+1}{2}\Big) - \frac{2(x-1)}{x^2+1} \quad \text{şi} \quad f''(x) = \frac{2(x-1)^2(x+1)}{x(x^2+1)^2} > 0,$$

deci $f'(x) > f'(1) = 0$ şi $f(x) > f(1) = 0$ şi astfel am demonstrat inegalitatea $\sqrt{t}\ln t > \left(\sqrt{t}+1\right)\ln\frac{t+1}{2}$, adică $L(a,b) < L\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big)$.

Bibliografie

1. **F. Burk** - *The Geometric, Logaritmic and Aritmetic Mean Inequality*, Amer. Math. Monthly 94(1987), 527-528.
2. **M. Bencze** - *New Means, new Inequalities and Refinement*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 9, Nr. 1/2001, 46-105.

[1] Profesor, Braşov