Similitudini în plan şi puncte Torricelli asociate

Cătălin ŢIGĂERU[1]

Subiectul lucrării îl reprezintă operaţia de compunere a similitudinilor aplicată unei configuraţii geometrice: un triunghi ABC şi două puncte arbitrare $M, N \notin \{A, B, C\}$, la care vom ataşa punctul P, care este centrul similitudinii $S_3 = S_2 \circ S_1$, unde S_1 este similitudinea centrată în C, care îl transportă pe M în A, iar S_2 este centrată în B, transportându-l pe A în N. Două aspecte vom lămuri, legate de subiectul în cauză. În primul rând, vom arăta cum rolul pe care îl joacă punctul P poate fi preluat şi de punctele M şi N. Mai mult, vom demonstra că putem inversa rolurile triunghiurilor ABC şi MNP. Al doilea aspect al lucrării se referă la identificarea a două puncte Torricelli generalizate, pe care le numim asociate compunerii celor două similitudini. În final vom lămuri şi o situaţie interesantă, credem, cu caracter de noutate, legată de coincidenţa acestor puncte. În expunere se foloseşte formalismul complex, deoarece permite atacarea unor probleme grele, pentru care soluţia sintetică se dovedeşte a fi, în primă fază, greu de văzut. Interpretările geometrice însoţesc, în limita spaţiului, rezultatele teoretice. Mai precizăm că unele rezultate sunt demonstrate în [**3**] şi [**5**].

1. Compunerea similitudinilor şi teorema fundamentală. Mulţime punctelor planului P se identifică, prin fixarea unui reper, cu mulţimea numerelor complexe.

Definiţie. Similitudinea de centru $M_0 \in P$, de raport $k \in [0, \infty)$ şi de unghi $\varphi \in (-\pi, \pi]$ este funcţia $S_{M_0}(k, \varphi) : P \to P$, definită astfel: dacă $M \in P$ şi $M' = S_{M_0}(k, \varphi)(M)$, avem

(a) dacă $M \neq M_0$, atunci $k = \dfrac{|M_0 M'|}{|M_0 M|}$, $\varphi = m(\widehat{M M_0 M'})$;

(b) dacă $M = M_0$, atunci $M' = M_0$.

Reamintim că similitudinile sunt bijecţii, anume $(S_{M_0}(k, \varphi))^{-1} = S_{M_0}(1/k, -\varphi)$. Dacă z_0 este afixul lui M_0 şi z afixul lui M, atunci expresia analitică a similitudinii este descrisă de funcţia

$$s_{z_0}(k, \varphi)(z) = z_0 + (z - z_0)\, k e^{i\varphi}. \tag{1}$$

Să notăm că, dacă z' este afixul lui M', atunci

$$k e^{i\varphi} = \frac{z' - z_0}{z - z_0}. \tag{1'}$$

Propoziţia 1. *Considerăm similitudinile $S_{M_1}(k_1, \varphi_1), S_{M_2}(k_2, \varphi_2)$, afixele punctelor M_1 şi M_2 fiind respectiv z_1 şi z_2. Dacă $k_1 k_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \neq 1$, atunci există punctul X, de afix x, astfel încât $S_{M_2}(k_2, \varphi_2) \circ S_{M_1}(k_1, \varphi_1) = S_X(k_1 k_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, unde afixul lui X este determinat de relaţia*

$$x = z_1 + (z_2 - z_1)\, \frac{1 - k_2 e^{i\varphi_2}}{1 - k_1 e^{i\varphi_1} \cdot k_2 e^{i\varphi 2}} = z_1 + (z_2 - z_1)\, \frac{1 - k_2 e^{i\varphi_2}}{1 - k_1 k_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}. \tag{2}$$

Demonstraţia acestui rezultat clasic se găseşte în [**4**]. Să notăm că relaţia $k_1 k_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 1$ este echivalentă cu relaţiile $k_1 k_2 = 1$ şi $\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \pmod{2\pi}$.

[1] Lect. dr., Univ."Ştefan cel Mare", Suceava

În cele ce urmează, fixăm cadrul în care se va desfăşura analiza noastră; anume, se consideră triunghiul ABC, cu afixele respectiv a, b, c şi fie M, N două puncte din plan, fixate, diferite de A, B şi C, de afixe m şi n. Luăm în considerare similitudinile de centre C şi B, care transferă pe M în A, respectiv pe A în N şi vom determina punctul P, care va fi centrul compunerii celor două similitudini. Ţinând cont de $(1')$ şi de (2), dacă punem $k_1 e^{i\varphi_1} = \dfrac{a-c}{m-c}$, $k_2 e^{i\varphi_2} = \dfrac{n-b}{a-b}$, atunci punctul P satisface $S_B(k_2,\varphi_2) \circ S_C(k_1,\varphi_1) = S_P(k_1k_2, \varphi_1+\varphi_2)$, afixul său, notat cu p, fiind descris de

$$p = c + (b-c)\frac{\frac{n-a}{b-a}}{1 - \frac{a-c}{m-c}\cdot\frac{n-b}{a-b}}. \tag{3}$$

Pentru început câteva observaţii, legate de aspectele geometrice foarte particulare ale formulei de mai sus, pe care cititorul le poate verifica prin calcul direct:

– cazul particular $k_1k_2 \neq 1$ şi $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \pmod \pi$ este echivalent cu teorema lui Menelaos;

– dacă $\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \pmod \pi$, atunci punctele M, N, P sunt coliniare, pentru $k_1k_2 = 1$ şi $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$, punctul P fiind mijlocul segmentului MN;

– o analiză a formulei arată că, dacă $M, N \notin \{A, B, C\}$, atunci şi $P \notin \{B, C\}$; există situaţii pentru care $P \equiv A$, cum se verifică în: $a = 0$, $b = 1$, $c = i$, $m = -1$, $n = i$; conform (3), $p = a = 0$.

Următorul rezultat lămureşte prima problemă asociată tripletelor$\{A, B, C\}$ şi $\{P, M, N\}$, descrisă în introducere.

Teorema 1. *Dacă P are afixul p, determinat de formula* (3), *atunci*

(a) *dacă punem* $k_3 e^{i\varphi_3} = \dfrac{c-b}{p-b}$, $k_4 e^{i\varphi_4} = \dfrac{m-a}{c-a}$, $k_5 e^{i\varphi_5} = \dfrac{b-a}{n-a}$, $k_6 e^{i\varphi_6} = \dfrac{p-c}{b-c}$, *va rezulta* $S_A(k_4,\varphi_4) \circ S_B(k_3,\varphi_3) = S_N(k_3k_4, \varphi_3+\varphi_4)$, $S_C(k_6,\varphi_6) \circ S_A(k_5,\varphi_5) = S_M(k_5k_6, \varphi_5+\varphi_6)$;

(b) *dacă punem* $q_1 e^{i\psi_1} = \dfrac{n-m}{a-m}$, $q_2 e^{i\psi_2} = \dfrac{b-p}{n-p}$, $q_3 e^{i\psi_3} = \dfrac{p-n}{b-n}$, $q_4 e^{i\psi_4} = \dfrac{c-m}{p-m}$, $q_5 e^{i\psi_5} = \dfrac{m-p}{c-p}$, $q_6 e^{i\psi_6} = \dfrac{a-n}{m-n}$, *atunci* $S_P(q_2,\psi_2) \circ S_M(q_1,\psi_1) = S_C(q_1q_2, \psi_1+\psi_2)$, $S_M(q_4,\psi_4) \circ S_N(q_3,\psi_3) = S_A(q_3q_4, \psi_3+\psi_4)$, $S_N(q_6,\psi_6) \circ S_P(q_5,\psi_5) = S_B(q_5q_6, \psi_5+\psi_6)$.

Demonstraţie. Începem prin a demonstra o formă echivalentă a formulei (3).

Lemă. *Afixul punctului P, notat cu p, care este centrul compunerii similitudinilor $S_B(k_2,\varphi_2) \circ S_C(k_1,\varphi_1)$, verifică relaţia*

$$\frac{n-p}{m-p} = \frac{a-c}{m-c}\cdot\frac{n-b}{a-b} \tag{\#}$$

şi reciproc, dacă afixul p verifică (#), *atunci verifică şi* (3).

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $S_P(k_1k_2, \varphi_1+\varphi_2)(M) = N$, de unde, conform formulei $(1')$, rezultă (#). Să presupunem că afixul punctului P verifică (#). Dacă notăm cu $w = k_1k_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \dfrac{a-c}{m-c}\cdot\dfrac{n-b}{a-b}$, atunci putem scrie $(1-w)p = n - wm$, de unde $(p-c)(1-w) = n - wm - (1-w)c = n - c - \dfrac{a-c}{a-b}(n-b) =$

$\dfrac{-bn-ac+ab+cn}{a-b}=(b-c)\,\dfrac{n-a}{b-a}$, de unde (3).

Revenim la demonstraţia teoremei. Pentru punctul (a), trebuie demonstrat că, dacă p satisface (3), atunci m şi n verifică formulele analoge, ceea ce, în virtutea lemei, revine la demonstrarea formulelor

$$\frac{m-n}{p-n}=\frac{m-a}{c-a}\cdot\frac{c-b}{p-b}\quad \text{şi} \tag{$\#'$}$$

$$\frac{p-m}{n-m}=\frac{b-a}{n-a}\cdot\frac{p-c}{b-c}. \tag{$\#''$}$$

Din (3) se obţine $\dfrac{p-b}{c-b}=\dfrac{\frac{n-b}{a-b}\cdot\frac{m-a}{m-c}}{1-w}$ şi din (#) deducem $\dfrac{m-n}{p-n}=\dfrac{1-w}{-w}$. Mai departe avem $\dfrac{p-b}{c-b}\cdot\dfrac{m-n}{p-n}=\dfrac{n-b}{a-b}\cdot\dfrac{m-a}{m-c}\cdot\dfrac{m-c}{c-a}\cdot\dfrac{a-b}{n-b}=\dfrac{m-a}{c-a}$, de unde rezultă ($\#'$). Analog se demonstrează şi ($\#''$). Pentru punctul (b), trebuie demonstrat că, dacă p satisface (3), atunci a, b, şi c satisfac relaţiile $a=n+(m-n)\,\dfrac{\frac{c-p}{m-p}}{1-\frac{p-n}{b-n}\cdot\frac{c-m}{p-m}}$ şi celelalte, ceea ce este echivalent cu a demonstra relaţiile $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{p-n}{b-n}\cdot\dfrac{c-m}{p-m}$ şi celelalte, care nu sunt altceva decât rescrieri ale relaţiilor (#), ($\#'$) şi ($\#''$). Q. e. d.

2. Punctele Torricelli asociate compunerii a două similitudini. În continuare, procedăm după cum urmează: considerăm punctele A', B' şi C', de afixe a', b' şi respectiv c', definite de $A'=S_C(k_1,\varphi_1)(P)$, $B'=S_A(k_5,\varphi_5)(M)$, $C'=S_B(k_3,\varphi_3)(N)$.

Din Teorema 1 deducem şi că $A'=S_B(1/k_2,-\varphi_2)(P)$, $B'=S_C(1/k_6,-\varphi_6)(M)$, $C'=S_A(1/k_4,-\varphi_4)(P)$. Trecând la nivelul afixelor, relaţiile de mai sus se traduc în formulele

$$\begin{cases} a'=c+(p-c)\,\dfrac{a-c}{m-c}=b+(p-b)\,\dfrac{a-b}{n-b},\\ b'=a+(m-a)\,\dfrac{b-a}{n-a}=c+(m-c)\,\dfrac{b-c}{p-c},\\ c'=b+(n-b)\,\dfrac{c-b}{p-b}=a+(n-a)\,\dfrac{c-a}{m-a}.\end{cases} \tag{4}$$

Dacă inversăm rolurile tripletelor $\{A,B,C\}$ şi $\{P,M,N\}$ (Teorema 1 ne permite acest lucru), putem considera analogele punctelor A', B' şi C', anume P', M' şi N', de afixe p', m' şi respectiv n', unde $P'=S_N(q_3,\psi_3)(A)$, $N'=S_M(q_1,\psi_1)(C)$, $M'=S_P(q_5,\psi_5)(B)$, analogele formulelor (4) fiind

$$\begin{cases} p'=n+(a-n)\,\dfrac{p-n}{b-n}=m+(a-m)\,\dfrac{p-m}{c-m},\\ m'=p+(b-p)\,\dfrac{m-p}{c-p}=n+(b-n)\,\dfrac{m-n}{a-n},\\ n'=m+(c-m)\,\dfrac{n-m}{a-m}=p+(c-p)\,\dfrac{n-p}{b-p}.\end{cases} \tag{5}$$

Propoziţia 2. *$PP'AA'$, $MM'BB'$, $NN'CC'$ sunt paralelograme, eventual degenerate.*

Demonstraţie. Demonstrăm relaţiile importante:

$$a-a'=-(p-p')\,,\quad b-b'=-(m-m')\,,\quad c-c'=-(n-n')\,. \tag{6}$$

Raţionamentul se urmăreşte uşor în cele ce urmează: din (5) se obţine $p'-p=\dfrac{(n-p)(b-a)}{b-n}$ şi din (4) se obţine $a'-a=\dfrac{(b-a)(n-p)}{n-b}$; de aici rezultă că $a-a'=-(p-p')$; celelalte relaţii se deduc în acelaşi fel. Conchidem imediat că perechile de segmente $\{[AA'],[PP']\}$, $\{[BB'],[MM']\}$ şi $\{[CC'],[NN']\}$ sunt respectiv congruente, paralele sau confundate, ceea ce încheie demonstraţia.

Propoziţia 3. *Sunt adevărate următoarele relaţii:*

$$\frac{c'-b}{a-b}=\frac{c-b}{a'-b}=\frac{c-b'}{a-b'}, \tag{7}$$

$$\frac{p'-n}{m-n}=\frac{p-n'}{m-n'}=\frac{p-n}{m'-n}; \tag{8}$$

$$\frac{n-p'}{m-p'}=\frac{c-a'}{b-a'},\quad \frac{m-n'}{p-n'}=\frac{b-c'}{a-c'},\quad \frac{p-m'}{n-m'}=\frac{a-b'}{c-b'}. \tag{9}$$

Demonstraţie. Relaţiile (4) se mai scriu şi

$$\frac{c'-a}{c-a}=\frac{n-a}{m-a}=\frac{b-a}{b'-a};\quad \frac{a'-b}{a-b}=\frac{p-b}{n-b}=\frac{c-b}{c'-b};\quad \frac{b'-c}{b-c}=\frac{m-c}{p-c}=\frac{a-c}{a'-c}. \tag{4'}$$

Din a doua relaţie se obţine $\dfrac{c'-b}{a-b}=\dfrac{c-b}{a'-b}$. Analog se obţine şi egalitatea cu celălalt raport din (7). Inversând rolurile triunghiurilor ABC şi MNP, rezultă şi (8). Remarcăm şi relaţiile

$$\frac{p'-n}{p-n}=\frac{a-n}{b-n}=\frac{m-n}{m'-n},\quad \frac{m'-p}{m-p}=\frac{b-p}{c-p}=\frac{n-p}{n'-p},\quad \frac{n'-m}{n-m}=\frac{c-m}{a-m}=\frac{p-m}{p'-m}, \tag{5'}$$

care sunt echivalentele relaţiilor (4′). Relaţiile (9) se deduc astfel: din (4) şi din (5), coroborat cu (#), obţinem $\dfrac{a'-c}{a'-b}=\dfrac{(p-c)(a-c)(n-b)}{(p-b)(a-b)(m-c)}$, respectiv $\dfrac{p'-n}{p'-m}=\dfrac{(a-c)(a-n)}{(a-b)(a-m)}$. Înmulţind (#), (#′) şi (#″), rezultă că $\dfrac{(p-c)(n-b)}{(p-b)(m-c)}=\dfrac{a-n}{a-m}$, ceea ce, după înlocuire, încheie demonstraţia.

Teorema 2. *Considerăm punctele A', B', C', de afixe a', b' şi respectiv c', definite de relaţiile* (4) *şi punctele P', M', N', de afixe p', m' şi respectiv n', care satisfac relaţiile* (5).

(*a*) *Dacă* $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a}\in\mathbb{R}$, *atunci tripletele* $\{AA',BB',CC'\}$ *şi* $\{MM',NN',PP'\}$ *sunt formate din drepte paralele.*

(*b*) *Dacă* $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a}\notin\mathbb{R}$, *atunci tripletele* $\{AA',BB',CC'\}$ *şi* $\{MM',NN',PP'\}$ *sunt concurente.*

Demonstraţie. În virtutea Teoremei 1, sunt suficiente demonstraţiile afirmaţiilor referitoare la tripletul $\{AA',BB',CC'\}$. Demonstrăm că $AA'\parallel BB'\parallel CC'$. Din (4) se obţine $\dfrac{c'-a}{b-a}=\dfrac{n-a}{b-a}\cdot\dfrac{c-a}{m-a}\in\mathbb{R}$, adică $C'\in AB$. Din (7) deducem $\dfrac{c-a'}{b-a'}=\dfrac{c-a}{b'-a}=\dfrac{c'-a}{b-a}\in\mathbb{R}$, adică $A'\in BC$ şi $B'\in CA$. Pe de altă parte, din (4′) rezultă că $\dfrac{b-b'}{c-c'} = \dfrac{a-b'}{c-a} = \dfrac{b-a}{a-c'} \in \mathbb{R}$, deci $\dfrac{\bar{b}-\overline{b'}}{b-b'} = \dfrac{\bar{c}-\overline{c'}}{c-c'}$, ceea ce înseamnă că dreptele BB' şi CC' sau sunt paralele sau confundate. Dacă $BB' \equiv CC'$, atunci $\{B'\} = AC \cap CC' = \{C\}$, ceea ce, în virtutea lui (4), ar conduce la $M \equiv C$ sau $B \equiv C$, ceea ce este fals. Deci $BB' \parallel CC'$, la fel demonstrâdu-se şi celălalt paralelism.

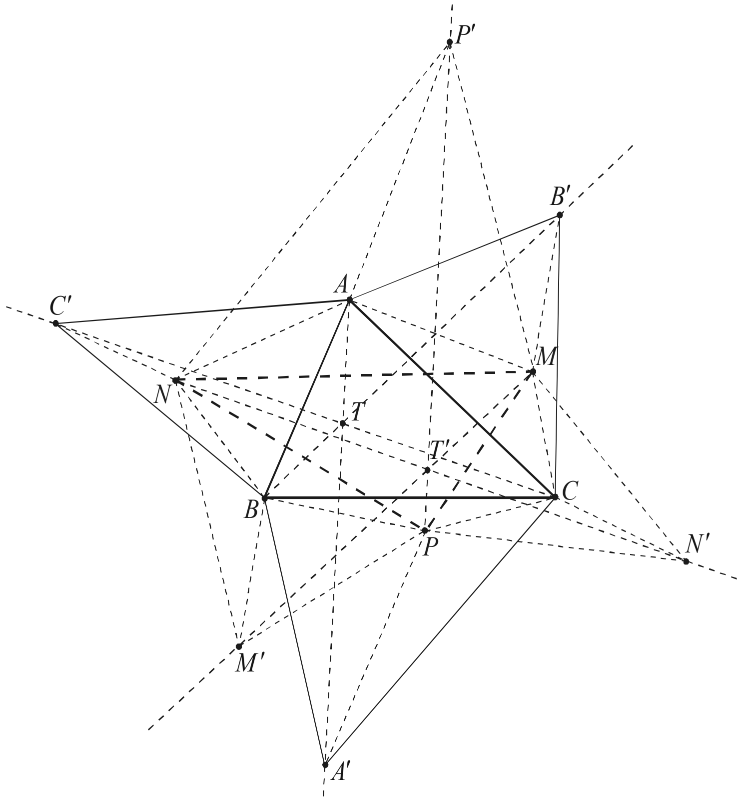

Figura 1

Demonstrăm punctul (b); dacă $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, rezultă că dreptele AA', BB' şi CC' se intersectează cel puţin două câte două. Fie $\{T\} = BB' \cap CC'$ şi fie t afixul său. Va rezulta că există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $b-b' = \lambda\,(b'-t)$, $c-c' = \mu\,(c-t)$ şi, ţinând cont şi de $\dfrac{b'-a}{c-a} = \dfrac{b-b'}{c'-c}$, dedusă din $(4')$, ajungem la $\dfrac{b'-a}{c-a} : \dfrac{b'-t}{c-t} = -\dfrac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}$; cum $\{C', A, B\}$ nu sunt coliniare, rezultă că patrulaterul $B'CTA$ este inscriptibil. Analog dovedim că $BC'AT$ este inscriptibil. Din (7) rezultă că $\dfrac{a'-c}{a'-b} = \dfrac{c-a}{b'-a}$; deoarece $B'CTA$ este inscriptibil şi deoarece $T \in BB'$, rezultă că $\dfrac{b'-a}{c-a}\cdot\dfrac{c-t}{b'-t} \in \mathbb{R}$ şi $\dfrac{b'-t}{t-b} \in \mathbb{R}$, deci $\dfrac{a'-c}{a'-b} : \dfrac{t-c}{t-b} \in \mathbb{R}$, adică şi $BA'CT$ este inscriptibil. Demonstrăm că $T \in AA'$; condiţiile de inscriptibilitate ale patrulaterelor se pot scrie şi $\dfrac{t-c}{t-a'}\cdot\dfrac{b-a'}{b-c} \in$

$\mathbb{R}$, $\dfrac{t-c}{t-a}\cdot\dfrac{b'-a}{b'-c}\in\mathbb{R}$ şi ţinând cont de $\dfrac{b-c}{b-a'}=\dfrac{b'-c}{b'-a}$, dedusă din (7), rezultă că $\dfrac{t-a'}{t-c}\cdot\dfrac{b-c}{b-a'}\cdot\dfrac{b'-a}{b'-c}\cdot\dfrac{t-c}{t-a}\in\mathbb{R}$, adică $\dfrac{t-a}{t-a'}\in\mathbb{R}$. Rezultă că AA', BB' şi CC' sunt concurente. Inversând rolurile tripletelor $\{AA',\ BB', CC'\}$ şi $\{MM', NN', PP'\}$, obţinem şi concurenţa dreptelor PP', MM' şi CC'. Demonstraţia este încheiată.

Observaţia 1. La punctul (a) nu obţinem $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel PP' \parallel MM' \parallel NN'$, cum s-ar părea că rezultă din Propoziţia 2, deoarece în exemplul $a=0$, $b=1$, $c=i$, $m=-1$, $n=i$, $p=0$, unde $a'=\dfrac{1}{2}(1+i)$, $b'=n=i$, $c'=m=-1$, $p'=-\dfrac{1}{2}(1+i)$, avem $AA'\equiv PP'$, $BB'\equiv MM'$, $CC'\equiv NN'$.

Observaţia 2. Geometric, condiţia $\dfrac{b-a}{n-a}\cdot\dfrac{m-a}{c-a}\in\mathbb{R}$, care se referă numai la poziţia punctelor din ipoteză, se traduce prin $m(\widehat{NAB})+m(\widehat{CAM})\in\{0,\pi\}$, adică unghiurile $\widehat{NAB}$ şi $\widehat{CAM}$ sunt sau opuse ca orientare şi egale în valoare absolută sau suplementare.

Observaţia 3. Cele spuse se urmăresc uşor pe figura 1, corespunzătoare cazului $\varphi_1>0$, $\varphi_2>0$. Se remarcă paralelogramele din Propoziţia 2 şi următoarele şiruri de triunghiuri direct asemenea, în ordinea în care sunt scrise, care se deduc din interpretările geometrice ale formulelor (7), (8) şi (9): $\triangle C'BC\sim\triangle NBP\sim\triangle ABA'\sim\triangle NAP'$, $\triangle A'CA\sim\triangle PCM\sim\triangle BCB'\sim\triangle P'AM$, $\triangle B'AB\sim\triangle MAN\sim\triangle CAC'\sim\triangle MCN'$ şi $\triangle C'BA\sim\triangle CBA'\sim\triangle CB'A\sim\triangle N'MP\sim\triangle NMP'\sim\triangle NM'P$. Tot de aici se deduce faptul că, dacă, de exemplu, M este un punct important în $\triangle ACB'$, atunci şi N şi P sunt acelaşi tip de punct în triunghiurile analoge.

Observaţia 4. Punctele T şi T', obţinute la punctul (b), sunt *puncte Torricelli generalizate* asociate tripletelor $\{A,B,C\}$ şi $\{P,M,N\}$. În adevăr, dacă punem, de exemplu, $\alpha=|b-c|$, $\beta=|c-a'|$, $\gamma=|a'-b|$ (sau orice numere proporţionale cu ele), atunci punctul T este punctul în care suma $\alpha|XA|+\beta|XB|+\gamma|XC|$ îşi atinge minimul, unde X este un punct oarecare din plan. Analog, punctul T' este punctul în care suma $\alpha|XP|+\beta|XM|+\gamma|XN|$ îşi atinge minimul. Pentru detalii, recomandăm cititorului paragraful 1.49 din [**3**], unde demonstraţiile sunt prezentate pe larg şi unde sunt expuse şi alte proprietăţi ale punctelor Torricelli.

În continuare, ne plasăm în condiţiile punctului (b) din Teorema 2.

Teorema 3. *$T\equiv T'$ dacă şi numai dacă punctele A, B, C, M, N, P sunt conciclice.*

Demonstraţie. Dacă $T\equiv T'$, atunci relaţia (6) asigură coincidenţa dreptelor $AA'\equiv PP'$, respectiv $BB'\equiv MM'$ şi $CC'\equiv NN'$, adică $\{C',N,T,C,N'\}$, $\{P',A,T,P,A'\}$, $\{M',B,T,M,B'\}$ sunt puncte coliniare, deci există $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ astfel ca $c'-t=\lambda(c'-n)$, $a-t=\mu(a-p)$.

Deoarece patrulaterul $AC'BT$ este inscriptibil, rezultă că $\dfrac{a-t}{a-b}\cdot\dfrac{c'-b}{c'-t}\in\mathbb{R}$, de unde, după înlocuire, se obţine $\dfrac{a-p}{a-b}\cdot\dfrac{c'-b}{c'-n}\in\mathbb{R}$. Ţinând cont de relaţia a treia

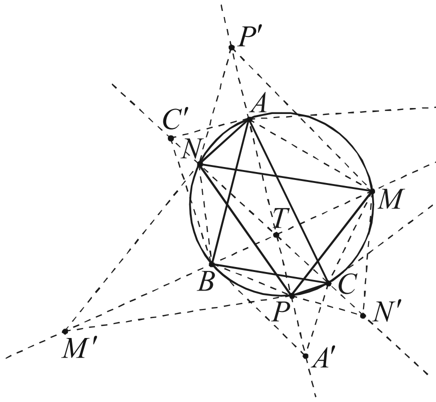

Figura 2

din (4), putem scrie $\dfrac{c'-b}{c'-n} = \dfrac{c-b}{c-p}$, care conduce la $\dfrac{a-p}{a-b} \cdot \dfrac{c-b}{c-p} \in \mathbb{R}$, deci patrulaterul $ABPC$ este inscriptibil. Analog se demonstrează şi că M, N aparţin cercului circumscris triunghiului ABC. Reciproc, să presupunem că punctele A, B, C, M, N, sunt conciclice şi demonstrăm că $T \equiv T'$ şi că punctul P aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Din (4) deducem că $\dfrac{b'-b}{n-m} = \dfrac{a-b}{n-a}$; după înlocuirea cu $\dfrac{a-b}{n-a} \cdot \dfrac{m-n}{m-b} \in \mathbb{R}$, asigurată de patrulaterul inscriptibil $ANBM$, rezultă că $\dfrac{b'-b}{n-m} \cdot \dfrac{m-n}{m-b} \in \mathbb{R}$, deci $\dfrac{b'-b}{m-b} \in \mathbb{R}$, adică $M \in BB'$; folosind celălalt patrulater inscriptibil, se arată şi că $N \in CC'$; de aici $BB' \equiv MM'$, $CC' \equiv NN'$, de unde rezultă că $T \equiv T'$. Deoarece $P \in AA'$, rezultă că $\dfrac{a'-a}{p-a} \in \mathbb{R}$, adică $\dfrac{a'-a}{p-m} \cdot \dfrac{p-m}{p-a} \in \mathbb{R}$, ceea ce, coroborat cu $\dfrac{a'-a}{p-m} = \dfrac{c-a}{c-m}$, dedusă din (4), conduce la $\dfrac{c-a}{c-m} \cdot \dfrac{p-m}{p-a} \in \mathbb{R}$, deci patrulaterul $AMCP$ este inscriptibil. Q. e. d.

De interes credem că este o interpretare fizică a teoremelor 2 şi 3 (v. [**3**], pag. 142).

Bibliografie

1. **C.Ionescu-Bujor** - *Elemente de transformări geometrice*, vol. I-IV Bibl. Soc. Şt. Matematice a R.S.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
2. **N. Mihăileanu** - *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Bibl. Soc. Şt. Matematice a R.S.R., Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.
3. **L. Nicolaescu, V. Boskoff** - *Probleme practice de geometrie*, Seria "Culegeri de matematică şi fizică", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Bibl. profesorului de matematică, Ed. Acad. R.S.R., 1988.
5. **C. Ţigăeru** - *Asupra unei clase de transformări geometrice*, Matematica în şcoala suceveană, nr. 8/1990, 1-7.