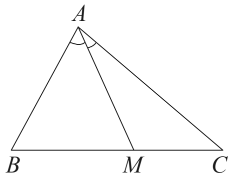
O generalizare a teoremei lui Van Aubel

Silviu BOGA[1]

Considerând o ceviană oarecare în locul bisectoarei unui triunghi se obţine următoarea generalizare a *teoremei bisectoarei*:

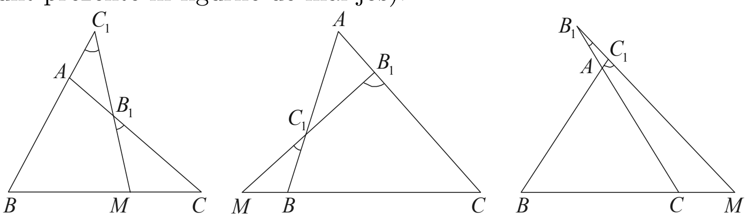


$$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}} \qquad (1)$$

(se stabileşte aplicând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ şi $\triangle ACM$ pentru a exprima MB şi MC).

Acest rezultat cunoscut a fost utilizat ca instrument de lucru în [**1**], [**3**] ş.a.

La rândul ei, relaţia (1) poate fi generalizată la cazul în care ceviana AM este înlocuită cu o transversală B_1C_1M ce nu-i paralelă cu AB, AC (câteva poziţii ale acesteia sunt prezente în figurile de mai jos):



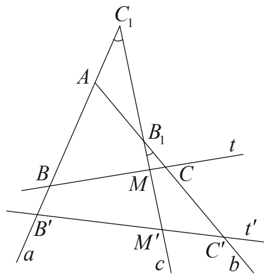
$$\frac{MB}{MC}=\frac{BC_1}{CB_1}\cdot\frac{\sin\widehat{C_1}}{\sin\widehat{B_1}}; \qquad (2)$$

evident, pentru $A\equiv B_1\equiv C_1$ relaţia (2) devine (1).

Pentru a dovedi această relaţie, procedăm ca şi în cazul relaţiei (1): cu teorema sinusurilor aplicată în $\triangle C_1BM$ şi $\triangle B_1CM$ obţinem $MB=\dfrac{BC_1}{\sin\widehat{M}}\sin C_1$ şi $MC=\dfrac{CB_1}{\sin\widehat{M}}\sin B_1$, care, prin împărţire, dau (2).

În unele aplicaţii este utilă o consecinţă directă a rezultatului dat de (2), consecinţă prin care sunt eliminate în fapt unghiurile.

Fie trei drepte a, b, c concurente două câte două şi transversalele t şi t'. Adoptăm notaţiile prezente pe figura alăturată şi convenim ca $(a;b)$ să însemne masură unuia dintre unghiurile determinate de dreptele a şi b.



Propoziţie. *În condiţiile specificate mai înainte, are loc formula*

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CB_1}{BC_1}=\frac{M'B'}{M'C'}\cdot\frac{C'B_1}{B'C_1}. \qquad (3)$$

Demonstraţie. Într-adevăr, conform cu (2), aplicată triunghiurilor $\triangle ABC$ şi $\triangle AB'C'$ şi transversalei B_1C_1, avem:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{BC_1}{CB_1}\cdot\frac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)},\qquad \frac{M'B'}{M'C'}=\frac{B'C_1}{C'B_1}\cdot\frac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)}.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

De aici, rezultă că $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{CB_1}{BC_1} = \dfrac{M'B'}{M'C'} \cdot \dfrac{C'B_1}{B'C_1} = \dfrac{\sin(a;c)}{\sin(b;c)}$, q.e.d.

Observaţii 1. Egalitatea (3) şi demonstraţia ei nu suferă modificări pentru alte poziţii ale dreptelor a, b, c (concurente două câte două) şi transversalelor t şi t'.

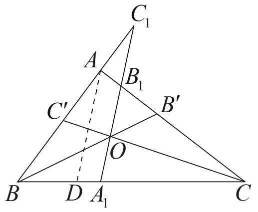
2. Dacă dreptele a, b, c sunt concurente în A, adică B_1 şi C_1 coincid cu A, atunci (3) se scrie în forma

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{M'B'}{M'C'} \cdot \frac{AC'}{AB'}. \tag{3'}$$

Menţionăm că (3′) poate fi stabilită uşor cu ajutorul relaţiei (1).

Teorema 1. (generalizarea *teoremei Van Aubel*). *Fie $\triangle ABC$ şi punctele $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ cu $BB' \cap CC' = \{O\}$. Dacă prin O trece o dreaptă care taie (BC) în A_1, $(BA$ în C_1 şi $(CA$ în B_1, atunci are loc relaţia*

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OA_1}{OB_1} + \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{OA_1}{OC_1} = 1. \tag{4}$$



Demonstraţie. Aplicăm (3) mai întâi la dreptele CA, CB, CC' şi transversalele AB şi A_1B_1 şi apoi la dreptele BA, BC, BB' şi transversalele AC şi A_1C_1:

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{OB_1}{OA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1}, \quad \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA} = \frac{OC_1}{OA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC_1}.$$

De aici obţinem

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{OA_1}{OB_1} + \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{OA_1}{OC_1} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CA_1}{CB_1} + \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BA_1}{BC_1}. \tag{5}$$

Construim $AD \parallel B_1A_1$ şi observăm că $\dfrac{CA_1}{CB_1} = \dfrac{CD}{CA}$ şi $\dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BD}{BA}$. Atunci, pentru membrul drept al relaţiei (5) revine la

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{CD}{CA} + \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BD}{BA} = 1$$

şi, în consecinţă, (4) este dovedită.

Observaţii. 1. Dacă $A \equiv B_1 \equiv C_1$, se obţine relaţia Van Aubel.

2. Particularizând $O \equiv G$ (centrul de greutate al triunghiului), relaţia (4) se scrie

$$\frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} = \frac{1}{GA_1} \quad (\textbf{S. Boga}, [\textbf{1}, \text{p.43}]).$$

3. Particularizând $O \equiv I$ (centrul cercului înscris triunghiului), obţinem

$$\frac{AC}{IB_1} + \frac{AB}{IC_1} = \frac{BC}{IA_1}.$$

Bibliografie

1. **S. Boga** - *O proprietate remarcabilă de fascicul.* Matematica în şcoala suceveană, 6/1989, 3-8.
2. **D. Brânzei, S. Aniţa, M. Chirchiu** - *Geometrie. Clasa a IX-a* (Colecţia "Mate–2000"), ed. a III-a, Editura Paralela 45, Piteşti, 1998.
3. **C. Artenie, C. Constanda** - *Generalizarea problemei bisectoarei glisate.* Recreaţii Matematice, 1/2001, 32-33.