Variaţiuni pe tema dreptei lui Euler şi cercului celor nouă puncte

Temistocle BÎRSAN[1]

Două dintre cele mai cunoscute "vedete" ale geometrie triunghiului sunt *dreapta lui Euler* şi *cercul celor nouă puncte* (*cercul lui Euler*) (fig. 1). Vom adopta notaţiile uzuale. Fie $\triangle ABC$, dreapta lui Euler (determinată de H şi O) şi $\mathcal{E}$ cercul celor nouă puncte (determinat de mijloacele laturilor A', B', C'). Sunt binecunoscute următoarele proprietăţi ale acestei configuraţii:

1° G, O_9 (centrul cercului $\mathcal{E}$) sunt pe $\triangle$;

2° $\mathcal{E}$ conţine picioarele înălţimilor D, E, F şi mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$, adică punctele A'', B'', C'';

3° $HO_9 = OO_9$, $HG = 2\,OG$;

4° punctele A' şi A'' sunt diametrul opuse în $\mathcal{E}$ şi $A'O = AA'' = A''H$;

5° $AO \parallel A'A''$ şi $AO = A'A''$;

6° cercurile $\mathcal{C}$ (circumscris $\triangle ABC$) şi $\mathcal{E}$ sunt omotetice prin omotetiile $h_H^{1/2}$ şi $h_G^{-1/2}$ [**1**]; dacă $\mathcal{C}$ are raza R, atunci $\mathcal{E}$ are raza $\dfrac{R}{2}$.

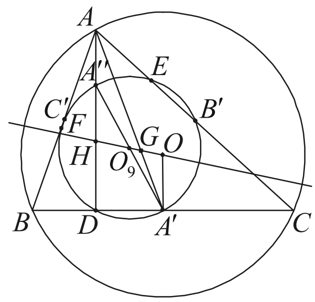

Fig. 1

Următorul rezultat, sugerat de configuraţia de mai sus, reprezintă o generalizare a proprietăţii 4° (în loc de H considerăm un punct oarecare):

Propoziţia 1. *Fie $\triangle ABC$ şi P un punct oarecare. Arătaţi că dreptele ce unesc mijloacele A'', B'' şi C'' ale segmentelor ceviene $[AP]$, $[BP]$ şi respectiv $[CP]$ cu mijloacele A', B', C' ale laturilor opuse sunt concurente (fig. 2).*

Demonstraţie. Patrulaterul $B'C'B''C''$ este paralelogram, căci $B'C'$ şi $B''C''$ sunt paralele cu BC şi egale cu $\dfrac{BC}{2}$. Ca urmare, $[B'B'']$ şi $[C'C'']$ se intersectează în P' aflat la jumătatea fiecăruia. La fel se arată că $A'A''$ şi una dintre $B'B''$, $C'C''$ se intersectează în P'.

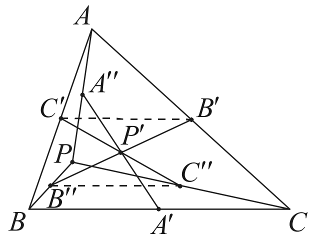

Fig. 2

Observaţii. 1) Pentru a obţine punctul P' este suficient să luăm o singură ceviană; dacă aceasta este AP, atunci P' este mijlocul segmentului $[A'A'']$.

2) Distingem trei cercuri cu centrul în punctul P' şi de raze $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ ce apar în locul cercului celor nouă puncte.

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Propoziţia 2. *Dacă P este pe Δ, atunci P', obţinut din P ca în Propoziţia 1, este de asemenea pe Δ (fig. 3).*

Demonstraţie. Fie A'' mijlocul segmentului eulerian $[AH]$ şi A''' mijlocul segmentului cevian $[AP]$; deci $A''A''' \parallel \Delta$. Notăm cu Q intersecţia paralelei prin A' la ceviana AP. Din acest fapt şi din proprietăţile $A'O \parallel AA''$ şi $A'O = AA''$, rezultă că $\triangle A'OQ$, $\triangle AA''A'''$ sunt congruente (ULU), deci $A'Q = AA''' = A'''P$. Patrulaterul $PA'QA'''$ este paralelogram şi P' este mijlocul segmentului $[PQ]$. Cum $P, Q \in \Delta$, urmează că $P' \in \Delta$.

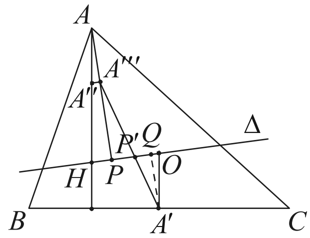

Fig. 3

Revenind la Propoziţia 1, vom impune punctului P condiţii suplimentare, care să-l apropie de H.

Propoziţia 3. *Fie P un punct în planul $\triangle ABC$. Punctele B', C', B'', C'' (fig.2) sunt conciclice dacă şi numai dacă $P \in AH$.*

Demonstraţie. Am observat deja că $B'C'B''C''$ este paralelogram. Dacă B', C', B'', C'' sunt conciclice, atunci $B'C'B''C''$ va fi dreptunghi, deci $B''C' \perp BC$. Dar $B''C' \parallel AP$ (în $\triangle PAB$). Deci $AP \perp BC$, adică $P \in AH$. Implicaţia reciprocă se dovedeşte pe cale inversă.

Propoziţia 4. *Fie P în planul $\triangle ABC$. Dacă punctele B', C', B'', C'' şi A' (sau A'') (fig.2) sunt conciclice, atunci P coincide cu H.*

Demonstraţie. Cercul pe care se află punctele are centrul în P'. Ambele punctele A' şi A'' vor fi pe cerc, căci $P'A' = P'A''$ şi unul din ele, prin ipoteză, este pe cerc. Conform Propoziţiei 3, aplicată de trei ori, avem $P \in AH$, $P \in BH$ şi $P \in CH$, adică P şi H coincid.

Propoziţia 5. *Dacă punctul P verifică condiţia $AP \perp BC$ şi punctele A', B', C', A'' (fig.2) sunt conciclice, atunci P este ortocentrul H al $\triangle ABC$.*

Demonstraţie. Punctul A_1 definit prin $\{A_1\} = AP \perp BC$ este piciorul înălţimii duse din A. Ca urmare, $A_1 \in \mathcal{E}$ şi $\triangle A_1A'A''$ dreptunghic în A_1 este înscris în $\mathcal{E}$; deci, $A'A''$ este un diametru în $\mathcal{E}$. În consecinţă, mijlocul lui $A'A''$, care este este P', va fi centrul cercului $\mathcal{E}$. Din faptul că $B', C' \in \mathcal{E}$, rezultă că punctele diametral opuse lor vor fi pe acest cerc, adică $B'', C'' \in \mathcal{E}$. Se poate aplica Propoziţia 4, conform căreia P este punctul H.

Propoziţia 6. *Dacă punctul P verifică condiţia $AP \perp BC$ şi punctele A'', B'', C'', A' (fig.2) sunt conciclice, atunci P este ortocentrul H.*

Demonstraţie. Simetricele punctelor A'', B'', C'' şi A' faţă de P' sunt de asemenea conciclice; aşadar, A', B', C' şi A'' sunt conciclice. Ipotezele Propoziţiei 5 fiind îndeplinite, rezultă că P coincide cu H.

Observaţii. 1) Propoziţiile 4, 5 şi 6 pot fi privite ca reciproce ale binecunoscutei afirmaţii: *dacă H este ortocentrul unui triunghi, atunci mijloacele laturilor sale, mijloacele segmentelor euleriene şi picioarele înălţimilor sunt conciclice (cercul lui Euler).*

2) Remarcăm că în enunţul Propoziţiei 4 este absentă condiţia $AP \perp BC$. Faptul este doar aparent, căci în ipotezele acesteia, rezultă că menţionata condiţie are loc (conform Propoziţiei 3).

Revenind din nou la Propoziţia 1, să examinăm rezultatul acesteia din alt punct de vedere. Notăm cu τ transformarea geometrică (a planului $\triangle ABC$) care pune punctul P în corespondenţă cu P', punct construit ca în Propoziţia 1 (a se vedea şi Observaţia ce-i urmează, punct 1)); deci $P \xrightarrow{\tau} P'$ sau $\tau(P) = P'$.

Vom indica câteva proprietăţi ale transformatei τ şi o vom compara cu omotetiile $h_H^{1/2}$ şi $h_G^{-1/2}$.

Iată câteva proprietăţi ale lui τ, care decurg direct din definiţiile lui τ sau au fost stabilite mai sus:

1° $G \xrightarrow{\tau} G$, $H \xrightarrow{\tau} O_9$;

2° $\tau(A) =$ mijlocul medianei $[AA']$ (analog, $\tau(B)$, $\tau(C)$);

3° $\tau(\triangle) = \triangle$, adică dreapta lui Euler este transformată în ea însăşi (conform Propoziţiei 2).

Propoziţia 7. *Sunt adevărate afirmaţiile:*
a) $\tau(O) = U$, *unde* U *este mijlocul segmentului* $[O_9O]$*;*
b) $\tau(O_9) = V$, *unde* V *este mijlocul segmentului* $[O_9U]$, *adică* $O_9V = \dfrac{1}{4} O_9O$.

Demonstraţie. *a)* Afirmaţia rezultă din faptul că patrulaterul $OA'O_9L$ (fig.4) este paralelogram (O_9L ca linie mijlocie în $\triangle AHO$ este paralelă cu AH şi egală cu $\dfrac{AH}{2}$, iar OA', după cum am amintit la început, are de asemenea aceste două prprietăţi).

b) Argument similar: $O_9A'UK$ este paralelogram ($A'O_9$ şi UK sunt paralele cu OA şi egale cu $\dfrac{OA}{2}$).

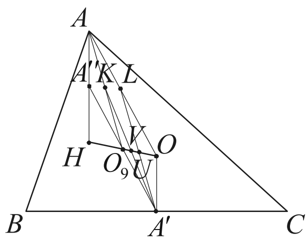

Fig. 4

Propoziţia 8. *Are loc egalitatea* $\tau = h_G^{1/4}$, *adică* τ *este omotetia de centru* G *şi raport* $\dfrac{1}{4}$.

Demonstraţie. Faptul că imaginea P' a punctului P se obţine construind mai întâi mijlocul A'' al segmentului $[AP]$ şi apoi P' ca mijloc al segmentului $[A'A'']$ se scrie: $\tau = h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}$ (într-adevăr, $h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}(P) = h_{A'}^{1/2}\left(h_A^{1/2}(P)\right) = h_{A'}^{1/2}(A'') = P'$). Ca produs de două omotetii, τ va fi tot o omotetie, cu centrul coliniar cu centrele omotetiilor factor şi de raport $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$ ([**1**, p.81], [**4**, p.85]). Să notăm cu T centrul omotetiei τ, $T \in AA'$. Poziţia punctului T pe AA' poate fi aflată cu ajutorul unor formule prezente în locurile citate mai înainte; preferăm să o determinăm direct. Avem:

$$\begin{aligned} \tau(T) &= T \Rightarrow h_{A'}^{1/2} \circ h_A^{1/2}(T) = T \Rightarrow h_{A'}^{1/2}(S) = T, \text{ unde } S = h_A^{1/2}(T) \Rightarrow \\ \overrightarrow{A'T} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'S} \text{ şi } \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AT} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AS} = 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'S}) = \end{aligned}$$

$$= 2(\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{A'T}) = 2(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{A'T}) \Rightarrow -\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{A'T} \Rightarrow T \text{ coincide cu } G,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Speculând faptul că omotetiile transformă dreptele ce trec prin centru în ele însele şi cercurile în cercuri ([**1**], [**4**]), putem completa lista proprietăţilor lui τ de mai sus:

4° dreptele suport ale medianelor $\triangle ABC$ sunt invariante la τ;

5° *dreapta lui Nagel* IN (N este *punctul lui Nagel*) este invariantă, căci $G \in IN$; avem $\tau(I) = I'$, cu $I' \in IN$, $4GI' = GI$ şi $\tau(N) = S$, unde S este punctul lui Spiecker – centrul cercului înscris în triunghiul median $\triangle A'B'C'$ [**2**, pp.90 şi 233].

Observaţie. Propoziţia 2, căreia i-am dat o demonstraţie directă, decurge şi din faptul că $\triangle$ trece prin G şi τ este omotetie.

Încheiem cu o problemă care poate părea dificilă, dar care este uşor de rezolvat în contextul nostru.

Problemă. *Cercul determinat de mijloacele medianelor* $\triangle ABC$ *are centrul pe dreapta lui Euler în mijlocul segmentului* $[OO_9]$ *şi raza* $\dfrac{R}{4}$.

Soluţie. Observăm că acest cerc este imaginea prin τ a cercului circumscris $\triangle ABC$ (proprietatea 2)) şi apoi utilizăm Propoziţia 7, *a*).

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Biblioteca profesorului de matematică, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **D. Brânzei, S. Aniţa, M. Chirciu** - *Geometrie. Clasa a IX-a*, Colecţia Mate-2000, ed. a III-a, Paralela 45, Piteşti, 1998.
3. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
4. **D. Smaranda, N. Soare** - *Transformări geometrice*, Biblioteca profesională de matematică, Ed. Academiei, Bucureşti, 1988.
