Asupra calculării unor limite de şiruri

D. M. BĂTINEŢU-GIURGIU[1]

Oricărui şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive îi vom asocia şirurile $(a_n!)_{n\geq 1}$ şi $\left(\sqrt[n]{a_n!}\right)_{n\geq 1}$, unde $a_1! = a_1$, $\sqrt[1]{a_1!} = a_1$, $a_{n+1}! = a_n! \cdot a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, vom nota $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vom considera mulţimile de şiruri:

$$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \mid \exists \lim_{n\to\infty} \Delta x_n = x \in \mathbb{R}_+^*\right\},$$
$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \mid \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = x \in \mathbb{R}_+^*\right\},$$

pentru care evidenţiem câteva proprietăţi.

P$_1$. *Oricare ar fi* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, *atunci* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = x \in \mathbb{R}_+^*$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = x$. Deci $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Această incluziune este strictă: şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ este în $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, dar nu şi în $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

P$_2$. *Oricare ar fi* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{x_n} \cdot \dfrac{n+1}{n}\right) = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

P$_3$. *Oricare ar fi* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, *atunci* $\left(\sqrt[n]{x_n!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Demonstraţie. Conform criteriului Cauchy-d' Alembert, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_n!}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{x}{e} \in \mathbb{R}_+^*.$$

P$_4$. Oricare ar fi $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\left(\sqrt[n]{x_n!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Demonstraţie. În P$_3$ am arătat că, dacă $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x_n!}}{n} = \dfrac{x}{e}$; ca urmare,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{\sqrt[n]{x_n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{x_n!}} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{x}{e} \cdot \frac{e}{x} \cdot 1 = 1,$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}}{\sqrt[n]{x_n!}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}!}} \right) = x \cdot \frac{e}{x} = e.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{n\to\infty} \Delta\Big(\sqrt[n]{x_n!}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt[n+1]{x_{n+1}!} - \sqrt[n]{x_n!}\Big) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{x_n!}}{n} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln (u_n)^n \right) = \frac{x}{e},$$

q.e.d.

Aplicaţii (ale proprietăţii P_4).

1. Dacă $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$. Conform cu P_4, rezultă că $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e},$$

unde $(L_n)_{ns>1}$ este *şirul lui Lalescu* (*Problema 579*, G.M., vol VI (1900-1901), p.148).

2. Dacă $x_n = 2n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 2$. Rezultă că $\left(\sqrt[n]{(2n-1)!!}\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!} - \sqrt[n]{(2n-1)!!} \right) = \frac{2}{e};$$

am obţinut limita *Problemei C:904*, G.M. - 5/1989, p.187.

Propoziţia 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$*; atunci* $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = a \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. Conform ipotezei $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = x \in \mathbb{R}_+^*$ şi deci (din P_2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Avem relaţia următoare:

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{\Delta x_n}} \right]^{\frac{n}{x_n} \cdot \Delta x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n \in \mathbb{R}_+^*$, atunci trecând la limită în această relaţie pentru $n \to \infty$, obţinem $a = e^{1/x \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = x \ln a$.

Reciproc, dacă $\exists b = \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n \in \mathbb{R}_+^*$, trecând la limită în aceeaşi relaţie rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = e^{b/x}$, adică $a = e^{b/x}$.

Propoziţia 2. *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$*, atunci: a)* $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$*, unde* $u_n = \dfrac{x_n y_n}{z_n}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, şi b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta u_n = \dfrac{xy}{z}$.

Demonstraţie. Conform enunţului, $\exists \lim_{n\to\infty} \Delta x_n = x$, $\exists \lim_{n\to\infty} \Delta y_n = y$ şi $\exists \lim_{n\to\infty} \Delta z_n = z$ cu $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Cum, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y_n}{z_n} = \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y_{n+1}}{z_{n+1}} + \frac{x_n y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{x_n y_n}{z_n} = \\ &= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_n z_{n+1}}\left(y_{n+1}z_n - y_n z_{n+1}\right) = \\ &= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_n z_{n+1}}\left(y_{n+1}z_n - y_n z_n + y_n z_n - y_n z_{n+1}\right) = \\ &= \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}\Delta x_n + \frac{x_n}{z_{n+1}}\Delta y_n - \frac{x_n y_n}{z_n z_{n+1}}\Delta z_n,\end{aligned}$$

trecând la limită cu $n \to \infty$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} \Delta u_n = \frac{y}{z}x + \frac{x}{z}y - \frac{xy}{z^2}z = \frac{xy}{z}$ şi demonstraţia se încheie.

Aplicaţii (ale propoziţiei 2).

1. Dacă $x_n = y_n = n$, $z_n = \sqrt[n]{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e$ (*Problema C:890*, G.M. - 4/1988).

2. Dacă $x_n = \sqrt[n]{n!}$, $y_n = \sqrt[n]{(2n-1)!!}$, $z_n = n$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!\,(2n+1)!!}}{n+1} - \frac{\sqrt[n]{n!\,(2n-1)!!}}{n}\right) = \frac{2}{e^2},$$

iar dacă $x_n = y_n = \sqrt[n]{n!}$, $z_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}\right)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - \frac{\left(\sqrt[n]{(2n-1)!!}\right)^2}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{4}{e},$$

etc.

3. Tot ca aplicaţie a Propoziţiei 2 se obţin limitele problemelor următoare: *C:2869*, *C:2878*, *C:2987*, *C:3010* din G.M., *L.192* din Revista matematică din Constanţa şi *PP.2312*, *PP.2759*, *PP.3680*, *PP.5219*, *PP.5220*, *PP.5224*, *PP.5227* din Octogon Mathematical Magazine.

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.
2. **D. M. Bătineţu-Giurgiu** - *O abordare a unor limite*, G.M. - 5/2006, 227-229.
3. **M. Ţena** - *O altă soluţie a problemei 579 (G.M.)*, Revista "Licăriri" a Liceului "Nicolae Bălcescu", Craiova, 1978, 13-14.