Construcţii aproximative cu rigla şi compasul ale numărului π

Alexandru MOSCALIUC[1]

Notaţia $\boldsymbol{\pi}$ pentru raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său s-a încetăţenit în matematică datorită lui **L. Euler**, care a utilizat-o în tratatul său *Introductio in analysis infinitorum* (1748). Valori aproximative ale lui π au fost utilizate încă din antichitatea timpurie de multe popoare. Amintim doar că **Arhimede**, în tratatul *Asupra măsurării cercului*, a găsit că $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ prin aşa-numita acum *metodă a perimetrelor* (cea cu poligoanele regulate înscrise şi circumscrise).

În strânsă legătură cu identitatea numărului π este problema *cuadraturii cercului* – construcţia cu rigla şi compasul a unui pătrat de arie egală cu aria unui cerc dat; problema revine la *rectificarea cercului* – construcţia cu aceleaşi instrumente a unui segment de lungime egală cu lungimea unui cerc dat – ce se reduce la rându-i la construcţia cu rigla şi compasul a unui segment de lungime π.

Această problemă celebră formulată de grecii antici şi-a găsit rezolvarea în anul 1882, când **F. Lindemann** a dovedit că π este transcendent (adică nu-i număr algebric). Graţie acestui rezultat şi faptului că numerele ce se pot construi cu rigla şi compasul formează o parte a mulţimii numerelor algebrice, rezultă că este imposibilă cuadratura cercului.

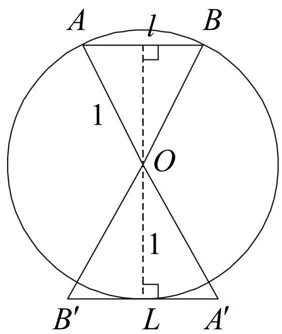
Putem aproxima, însă, numărul π cu numere constructibile cu rigla şi compasul. Scopul acestei lucrări este de a da o astfel de aproximare a lui π şi câteva aplicaţii ilustrative, într-o prezentare accesibilă elevilor de cl. a IX-a.

Propoziţie. *Are loc următoarea inegalitate:*

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}-0,01 < \pi < \sqrt{2}+\sqrt{3}, \tag{1}$$

i.e. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *aproximează numărul* π *prin adaos cu o eroare mai mică de 0,01.*

Soluţie. Fie l, L lungimile laturilor poligoanelor regulate cu n laturi înscris şi respectiv circumscris unui cerc de rază egală cu 1. Între perimetrele acestor poligoane şi lungimea cercului avem relaţia



$$nl < 2\pi < nL. \tag{2}$$

Deoarece $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'}) = \frac{360^\circ}{n}$ şi $l = 2\sin\frac{180^\circ}{n}$, $L = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$, relaţia (2) se scrie

$$n\sin\frac{180^\circ}{n} < \pi < n\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \tag{3}$$

Luând în (3) $n = 60$, obţinem

$$60\sin 3^\circ < \pi < 60\,\mathrm{tg}\,3^\circ. \tag{4}$$

Ţinând seama că $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, vom avea

$$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ\cos 15^\circ - \sin 15^\circ\cos 18^\circ \quad \text{şi} \quad \mathrm{tg}\,3^\circ = \frac{\mathrm{tg}\,18^\circ - \mathrm{tg}\,15^\circ}{1+\mathrm{tg}\,18^\circ\,\mathrm{tg}\,15^\circ}. \tag{5}$$

---

[1] Profesor, Şcoala generală nr. 6, Botoşani

Cum

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right), \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}},$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right), \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3},$$

inegalităţile (4) se scriu:

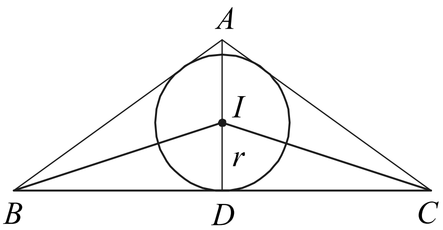
$$\frac{60}{16}\left[\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right] < \pi < 60\frac{\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}\left(2-\sqrt{3}\right)}. \tag{6}$$

Printr-un calcul de rutină anevoios şi neplăcut se verifică faptul că membrul stâng din (6) este mai mare ca $\sqrt{2}+\sqrt{3}-0,01$, pe când cel drept este mai mic ca $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. În concluzie, inegalităţile (1) sunt adevărate.

Observaţie. Construcţia cu rigla şi compasul a unui segment de lungime $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (în prezenţa unui segment unitate) este elementară. Ca urmare, Propoziţia oferă o modalitate de a construi aproximativ numărul π cu rigla şi compasul.

În aplicaţiile următoare ale Propoziţiei se face *cuadratura/rectificarea unui cerc cu rigla şi compasul* **în mod aproximativ**, adică se construieşte cu aceste instrumente un pătrat/segment având aria/lungimea aproximativ aria/lungimea cercului dat.

Aplicaţia 1. *Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC = \sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{2}$ şi $\mathcal{C}(I,r)$ cercul înscris acestuia. Atunci lungimea cercului $\mathcal{C}(I,r)$ este aproximativ egală cu BC, iar aria lui este aproximativ egală cu aria $\triangle BIC$; în ambele situaţii eroarea aproximării fiind mai mică ca $0,01$.*



Soluţie. Avem: $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 1$, deci $AD = 1$ şi

$$r = \frac{S}{p} = \frac{AD \cdot BC}{AB+BC+AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

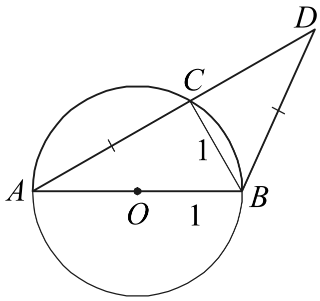
Ţinând cont de faptul că $\pi \simeq \sqrt{2}+\sqrt{3}$, pentru cercul $\mathcal{C}(I,r)$ obţinem:

$$\mathcal{L} = 2\pi r \simeq 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}, \quad \text{adică} \quad \mathcal{L} \simeq BC;$$

$$\mathcal{A} = \pi r^2 \simeq \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \quad \text{adică} \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{BIC}$$

(într-adevăr, $\mathcal{A}_{BIC} = \frac{1}{2}BC \cdot ID = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$).

Să dovedim că, în formulele găsite, $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{A}$ sunt aproximate cu o eroare mai mică decât $0,01$. Într-adevăr, înmulţind inegalitatea $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\pi < 0,01$ (adevărată conform Propoziţiei!) cu $2r$, obţinem $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \mathcal{L} < 0,01 \cdot 2r$ sau $BC - \mathcal{L} < 0,01 \cdot 2r$. Cum $2r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < 1$, urmează că $BC - \mathcal{L} < 0,01$. La fel, dar înmulţind aceeaşi inegalitate cu r^2, obţinem $\mathcal{A}_{BIC} - \mathcal{A} < 0,01$.



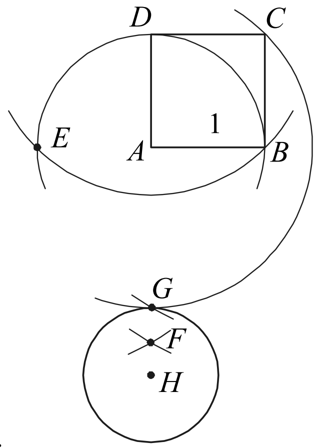
Aplicaţia 2. *Fie cercul $\mathcal{C}(O,1)$ şi punctele A, B, C şi D ca în figura de mai jos: $BC = 1$, $BD = AC$. Arătaţi că lungimea semicercului $\overset{\frown}{AB}$ (aria semicercului) este aproximativ egală cu lungimea segmentului $[AD]$ (respectiv aria triunghiului ABD), eroarea fiind mai mică decât $0,01$.*

Soluţie. Deoarece $AB = 2$ şi $BC = 1$, rezultă că $AC = \sqrt{3}$; la fel, din $BC = 1$ şi $BD = AC = \sqrt{3}$, deducem că $CD = \sqrt{2}$. Atunci, $AD = AC + CD = \sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq \pi$ şi $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \simeq \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot 1^2\right)$ etc.

Aplicaţia 3. *Dat un pătrat de latură 1, construiţi numai cu compasul un cerc de lungime aproximativ egală cu perimetrul pătratului.*

Soluţie. Mai întâi, să observăm că un cerc de lungime egală cu perimetrul pătratului dat are raza $\frac{2}{\pi}$. Dar, ţinând cont de Propoziţie, $\frac{2}{\pi} \simeq \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$. Aşadar, urmează să construim cu compasul un cerc de rază $2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

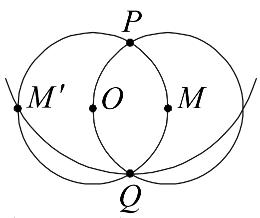
Etapele unei posibile construcţii sunt:



1. Construim simetricul E al punctului B faţă de A: $\{E\} = \mathcal{C}(A,1) \cap \mathcal{C}(D, DB)$.

2. Construim punctul F astfel încât $\triangle BEF$ să fie echilateral, iar F şi D să fie de o parte şi de alta a dreptei BE: $\{F\} = \mathcal{C}(B, BE) \cap \mathcal{C}(E, EB)$; evident, A, D, F sunt coliniare şi $AF = \sqrt{3}$ (înălţime în $\triangle BEF$ de latură 2).

3. Construim punctul G de partea dreptei BE în care se află F prin $\{G\} = \mathcal{C}(A, AC) \cap \mathcal{C}(B, AF)$. Deoarece $AB = 1$, $AG = \sqrt{2}$ şi $BG = \sqrt{3}$, rezultă că $\triangle AGB$ este dreptunghic în A şi, ca urmare, punctele A, F, G sunt coliniare, iar $FG = AF - AG = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.



4. Construm simetricul H al lui G faţă de F (construcţia, numai cu compasul, a simetricului M' al punctului M faţă de un punct O poate fi urmărită pe figura alăturată); evident $GH = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

5. Construim $\mathcal{C}(H, HG)$, care va fi cercul căutat: lungimea lui este $4\pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \simeq 4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 4$, cu o eroare de

$$4\pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 4 = 4\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left[\pi - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right] < 4\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot 0,01,$$

conform cu (1). Cum $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, vom avea

$$4\pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 4 < 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,02\ ,$$

adică eroarea cu care lungimea cercului construit este aproximată de perimetrul pătratului este mai mică decât $0,02$.