Inegalităţi generatoare de noi inegalităţi

I. V. MAFTEI[1]

Pornind de la anumite inegalităţi cunoscute ne propunem să obţinem noi inegalităţi.

Propoziţia 1. *Să se demonstreze că*

$$x_1x_2\cdots x_k\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1}\right)\leq x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1},\qquad(1)$$

$$\forall x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{R}_+^*,\quad\forall n,k\in\mathbb{N},\quad n,k\geq 2.$$

Demonstraţie. Utilizând relaţia dintre mediile aritmetică şi geometrică, aplicată numerelor $a_1,a_2,\ldots,a_k\in\mathbb{R}_+^*$, $n,k\in\mathbb{N}$, $n,k\geq 2$, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+k-1]{a_1^na_2\cdots a_k}&\leq\frac{na_1+a_2+\cdots+a_k}{n+k-1},\\ \sqrt[n+k-1]{a_1a_2^n\cdots a_k}&\leq\frac{a_1+na_2+\cdots+a_k}{n+k-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt[n+k-1]{a_1a_2\cdots a_k^n}&\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+na_k}{n+k-1}.\end{aligned}\qquad(2)$$

Sumând inegalităţile (2), rezultă că

$$\sqrt[n+k-1]{a_1^na_2\cdots a_k}+\sqrt[n+k-1]{a_1a_2^n\cdots a_k}+\cdots+\sqrt[n+k-1]{a_1a_2\cdots a_k^n}\leq a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

Dacă notăm $\sqrt[n+k-1]{a_i}=x_i$, $i=\overline{1,k}$, obţinem

$$x_1^nx_2\cdots x_k+x_1x_2^n\cdots x_k+\cdots+x_1x_2\cdots x_k^n\leq x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1},$$

care este tocmai inegalitatea (1).

Pentru $k=2$ şi $n=2h$, $h\in\mathbb{N}^*$, inegalitatea (1) devine

$$x_1^{2h+1}+x_2^{2h+1}\geq x_1x_2\left(x_1^{2h-1}+x_2^{2h-1}\right).\qquad(3)$$

Propoziţia 2. *Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ şi $k\in\mathbb{N}$. Atunci, are loc inegalitatea*

$$\frac{(ab)^{k-1}}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+(ab)^{k-1}}+\frac{(bc)^{k-1}}{b^{2k+1}+c^{2k+1}+(bc)^{k-1}}+\frac{(ac)^{k-1}}{a^{2k+1}+c^{2k+1}+(ac)^{k-1}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{ab(a+b)+1}+\frac{1}{bc(b+c)+1}+\frac{1}{ac(a+c)+1}.\qquad(4)$$

Demonstraţie. Aplicând inegalitatea (3) de k ori, obţinem

$$x_1^{2k+1}+x_2^{2k+1}\geq(x_1x_2)^k(x_1+x_2),\quad\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}_+^*,\quad\forall k\in\mathbb{N}.\qquad(5)$$

Ţinând seama de (5), putem scrie

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}\geq(ab)^k(a+b),\qquad(6)$$

de unde

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}+(ab)^{k-1}\geq(ab)^{k-1}[ab(a+b)+1]$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Sf. Sava", Bucureşti

sau

$$\frac{(ab)^{k-1}}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+(ab)^{k-1}} \leq \frac{1}{ab(a+b)+1}.$$

Sumând această inegalitate cu analoagele ei, obţinem (4).

Observaţie. Dacă în (4) luăm $k=2$ şi considerăm $abc=1$, suntem conduşi la inegalitatea

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1, \tag{7}$$

care a fost discutată la O. I. M. din anul 1996, India.

Propoziţia 3. *Fie numerele* $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$. *Să se demonstreze că*

$$\frac{a^{2n+1}}{b^n}+\frac{b^{2n+1}}{c^n}+\frac{c^{2n+1}}{a^n} \geq a^n b+b^n c+c^n a, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Demonstraţie. Înmulţind inegalitatea (6), considerată pentru $k=n$, cu $a^n c^n$, iar analoagele ei cu $b^n a^n$ şi respectiv $b^n c^n$, vom obţine relaţiile

$$\begin{aligned}
a^{3n+1}c^n+b^{2n+1}a^n c^n &\geq a^{2n+1}b^n c^n+a^{2n}b^{n+1}c^n,\\
b^{3n+1}a^n+c^{2n+1}b^n c^n &\geq b^{2n+1}a^n c^n+b^{2n}c^{n+1}a^n,\\
c^{3n+1}b^n+a^{2n+1}c^n b^n &\geq c^{2n+1}b^n a^n+c^{2n}a^{n+1}b^n,
\end{aligned}$$

din care, prin adunare, deducem că

$$a^{3n+1}c^n+b^{3n+1}a^n+c^{3n+1}b^n \geq a^n b^n c^n\left(a^n b+b^n c+c^n a\right),$$

adică (8).

Procedând ca în Propoziţia 3 se obţine

Propoziţia 4. *Pentru* $\forall n \in \mathbb{N}$ *şi* $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ *avem*

$$a\frac{b^{2n+2}}{c^n}+b\frac{c^{2n+2}}{a^n}+c\frac{a^{2n+2}}{b^n} \geq ab^{n+2}+bc^{n+2}+ca^{n+2}. \tag{9}$$

Propoziţia 5. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$a) \quad 1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}\sqrt[n]{(n!)^{2k}}, \tag{10}$$

$$b) \quad 1^{2n+1}+2^{2n+1}+\cdots+n^{2n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}(n!)^2. \tag{11}$$

Demonstraţie. Pentru $n=1$ avem egalitate. Considerăm $n \geq 2$ şi înlocuim în inegalitatea (6) succesiv $a=1$ şi $b=n$, $a=2$ şi $b=n-1$, ..., $a=n$ şi $b=1$. Sumând inegalităţile rezultate, vom obţine

$$2\left(1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}\right) \geq (n+1)\left[1^k n^k+2^k(n-1)^k+\cdots+n^k 1^k\right].$$

Cum paranteza pătrată este $\geq n\sqrt[n]{\left(1^k \cdot 2^k \cdot \cdots \cdot n^k\right)^2}=n\sqrt[n]{(n!)^{2k}}$, avem

$$2\left(1^{2k+1}+2^{2k+1}+\cdots+n^{2k+1}\right) \geq n(n+1)\sqrt[n]{(n!)^{2k}},$$

adică (10). Luând în (10) $k=n$, obţinem inegalitatea (11).