Asupra unei probleme dată la ONM, Bistriţa, 2005

Claudiu-Ştefan POPA[1]

Cele ce urmează au ca punct de plecare o problemă dată la ONM, Bistriţa, 2005 [**1**] aparţinând autorului acestei note şi pe care o vom nota în continuare cu (P):

(P) *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, având diagonalele perpendiculare în O. Pe semidreptele $(OA$ şi $(OB$ se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât unghiurile $\widehat{ANC}$ şi $\widehat{BMD}$ să fie drepte. Notăm cu E mijlocul segmentului MN. Să se arate că:*
a) triunghiurile OMN şi OBA sunt asemenea;
b) dreapta OE este perpendiculară pe dreapta AB.

Rezolvarea acestei probleme poate fi găsită de asemenea în [**1**].

Considerăm configuraţia geometrică pusă în valoare de (P) îndeajuns de generoasă pentru a prezenta alte câteva rezultate legate de ea. Dăm întâi o caracterizare a trapezului ortodiagonal, interesantă şi în sine.

Propoziţia 1. *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $AB \parallel CD$. Dacă punctul O este intersecţia diagonalelor sale, patrulaterul este ortodiagonal dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AO \cdot CO + BO \cdot DO$.*

Demonstraţie. $AB \parallel CD \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} = \frac{AB}{CD} = \frac{AO \cdot CO}{CO^2} = \frac{BO \cdot DO}{DO^2} = \frac{AB \cdot CD}{CD^2} = \frac{AO \cdot CO + BO \cdot DO}{CO^2 + DO^2}.$$

Acum $AO \cdot CO + BO \cdot DO = AB \cdot CD \Leftrightarrow CD^2 = CO^2 + DO^2 \Leftrightarrow AC \perp BD$, q.e.d.

Adăugăm la ipoteza problemei (P): punctele K, L sunt mijloacele bazelor $[AB]$, respectiv $[CD]$ iar punctul D' este simetricul punctului D faţă de punctul O. În aceste condiţii, pentru cele ce urmează presupunem cunoscute următoarele: punctele K, O şi L sunt coliniare, $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$, $\mathcal{A}^2_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}$ ([**2**], p. 243).

Propoziţia 2. *În ipoteza problemei (P), au loc următoarele:*
i) $MN = \sqrt{AB \cdot CD}$ şi $MN < KL$;
ii) $MN \perp KL$;
iii) $\mathcal{A}_{OMN} = \sqrt{\mathcal{A}_{AOB} \cdot \mathcal{A}_{COD}}$;
iv) $AN \parallel MD'$;

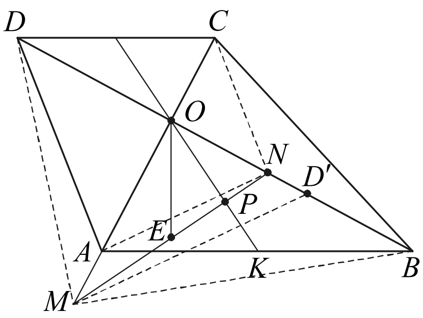
Demonstraţie. *i)* $\triangle ANC$ şi $\triangle BMD$ sunt dreptunghice în N, respectiv M şi $NO \perp AC$, $MO \perp BD$. Aplicând teorema înălţimii obţinem $NO^2 = AO \cdot CO$ şi $MO^2 = BO \cdot DO$. Cum $m(\widehat{MON}) = 90°$, avem $MO^2 + NO^2 = MN^2$ şi obţinem $MN = \sqrt{AB \cdot CD}$. Deoarece $KL = KO + LO = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$ şi $\sqrt{AB \cdot CD} < \frac{AB + CD}{2}$ ($ABCD$ trapez, deci $AB \neq CD$), rezultă că $MN < KL$.

ii) Fie $R \in (OL$ astfel încât $L \in (OR)$ şi $(OL) \equiv (RL)$. Cum $(DL) \equiv (CL)$, urmează că $OCRD$ este paralelogram. Dar $CO \perp DO$, deci $OCRD$ este dreptunghi şi

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi

avem $\widehat{CDO} \equiv \widehat{CRO}$. Din (P), punctul $a)$ avem $\widehat{CDO} \equiv \widehat{NMO}$; deci $\widehat{CRO} \equiv \widehat{NMO}$. Aceasta şi $MO \perp CR$ conduc la $NM \perp RO \Leftrightarrow NM \perp KL$.

iii) $\mathcal{A}_{MON} = \dfrac{ON \cdot OM}{2} =$
$= \dfrac{\sqrt{AO \cdot CO} \cdot \sqrt{BO \cdot DO}}{2} =$
$= \dfrac{\sqrt{AO \cdot CO \cdot BO \cdot DO}}{2}$.



Cum $\triangle AOB \sim \triangle COD$, avem $AO \cdot DO = BO \cdot CO$, deci $\mathcal{A}_{MON} = \dfrac{AO \cdot DO}{2} = \mathcal{A}_{AOD}$. Dar $\mathcal{A}^2_{AOD} = \mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}$, deci $\mathcal{A}_{OMN} = \sqrt{\mathcal{A}_{AOB}\mathcal{A}_{COD}}$.

iv) La fel ca la *iii)*, $OM \cdot ON = OA \cdot OD$. Deci $\dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OD}{OM}$ sau $\dfrac{ON}{OA} = \dfrac{OD'}{OM}$, adică $AN \parallel MD'$, q.e.d.

Observaţie. Dacă $MN \cap LK = \{P\}$, propunem cititorului să demonstreze că $OE = \sqrt{LO \cdot KO}$ şi $OP = \sqrt{\text{dist}\,(O; AB) \cdot \text{dist}\,(O; CD)}$.

Bibliografie

1. G.M. seria B, nr. 7/2005, p.298 şi p. 301.

2. D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă - *Geometria patrulaterului*, Ed. Teora, Bucureşti, 1998.

ERATA

Mai mulţti colaboratori aduc la cunoştinţă Redacţiei revistei următoarea greşeală în scrierea numelui marelui matematician *Leonhard Euler*: în loc de Leonhard s-a scris Leonard atât în titlul materialului din nr. 2/2004, p. 129, cât şi în cel din nr. 2/2005, p. 119 (prin preluarea primului pe calculator).

COMENTARIU

D-l *D. Plăeşu* din Iaşi semnalează Redacţiei faptul că *Problema L.62*, autor *M. Bîrsan*, publicată în nr. 1/2004 este cunoscută – apare în cartea lui *W. Sierpiński* intitulată *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime* (în l. rom. la Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966) la p. 104. Cele două soluţii date acestei probleme în nr. 1/2005, pp. 67-68, diferă de soluţia prezentată în cartea menţionată.