Ceviene şi triunghiuri triomologice

Temistocle BÎRSAN[1]

Cu ocazia aniversării a 110 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice

În această Notă, pornind de la un triunghi oarecare, punem în evidenţă o configuraţie de triunghiuri triomologice cu acelaşi centru de greutate ca şi triunghiul iniţial.

Două triunghiuri, $\triangle ABC$ şi $\triangle XYZ$, se numesc *omologice* dacă dreptele AX, BY, CZ sunt concurente; punctul de concurenţă se numeşte *centru de omologie* al triunghiurilor. Triunghiurile date sunt *triomologice* dacă admit trei centre de omologie.

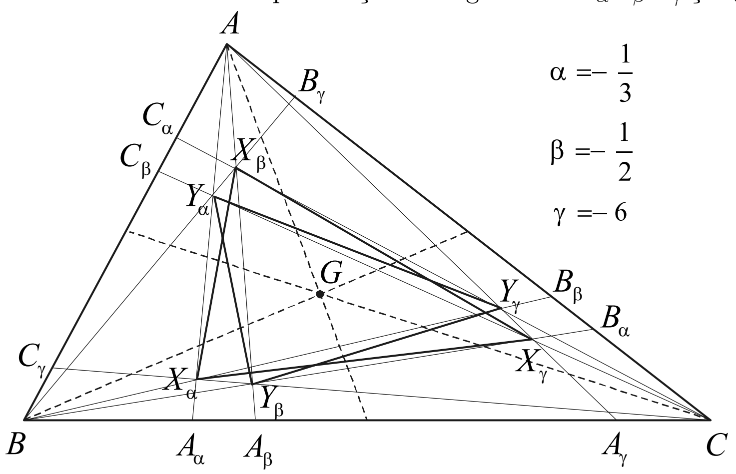
1. Fie ABC un triunghi oarecare şi numerele $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ cu $\alpha\beta\gamma = -1$. Pe dreapta BC considerăm punctele A_α, A_β, A_γ determinate de rapoartele $\dfrac{\overline{A_\alpha B}}{\overline{A_\alpha C}} = \alpha$, $\dfrac{\overline{A_\beta B}}{\overline{A_\beta C}} = \beta$ şi respectiv $\dfrac{\overline{A_\gamma B}}{\overline{A_\gamma C}} = \gamma$ (utilizăm segmentele orientate pentru ca punctele A_γ, A_β şi A_γ să poată fi situate în orice poziţie pe BC, exceptând vârfurile B şi C ale $\triangle ABC$). Punctele $B_\alpha, B_\beta, B_\gamma \in CA$ şi $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma \in AB$ se determină în mod similar. Condiţia $\alpha\beta\gamma = -1$ asigură existenţa punctelor X_α, Y_α etc. definite prin

$$\begin{aligned}
\{X_\alpha\} &= AA_\alpha \cap BB_\beta \cap CC_\gamma, & \{X_\beta\} &= AA_\beta \cap BB_\gamma \cap CC_\alpha,\\
\{X_\gamma\} &= AA_\gamma \cap BB_\alpha \cap CC_\beta, & \{Y_\alpha\} &= AA_\alpha \cap CC_\beta \cap BB_\gamma,\\
\{Y_\beta\} &= AA_\beta \cap CC_\gamma \cap BB_\alpha, & \{Y_\gamma\} &= AA_\gamma \cap CC_\alpha \cap BB_\beta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Atât pe figură cât şi schematic din

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline X_\alpha & (\alpha & \beta & \gamma) \\ X_\beta & (\beta & \gamma & \alpha) \\ X_\gamma & (\gamma & \alpha & \beta) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} A & B & C & \\ \hline (\alpha & \gamma & \beta) & Y_\alpha \\ (\beta & \alpha & \gamma) & Y_\beta \\ (\gamma & \beta & \alpha) & Y_\gamma \end{array} \tag{2}$$

se poate urmări formarea acestor puncte şi a triunghiurilor $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$.



[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Se observă că $\triangle ABC$ şi $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ sunt invers orientate, pe când $\triangle ABC$ şi $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt la fel orientate.

Propoziţia 1. *Triunghiurile $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt triomologice, centrele lor de omologie fiind vârfurile triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vom arăta următoarele:
(i) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt omologice cu centrul A;
(ii) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\beta Y_\gamma Y_\alpha$ sunt omologice cu centrul C;
(iii) $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle Y_\gamma Y_\alpha Y_\beta$ sunt omologice cu centrul B.

Aceste trei afirmaţii decurg din (1). Astfel, afirmaţia (1) revine la a vedea că dreptele $X_\alpha Y_\alpha$, $X_\beta Y_\beta$ şi $X_\gamma Y_\gamma$ sunt concurente în A. Cum din prima şi a patra egalitate din (1) rezultă că $X_\alpha, Y_\alpha \in AA_\alpha$, vom avea că $A \in X_\alpha Y_\alpha$. La fel obţinem relaţiile $A \in X_\beta Y_\beta$ şi $A \in X_\gamma Y_\gamma$. Aşadar (i) este adevărată. Pe aceeaşi cale se dovedesc (ii) şi (iii). Q.e.d.

Observaţie. În consecinţă, configuraţia conţine şi perechile de triunghiuri triomologice: $\triangle ABC$ şi $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$, $\triangle ABC$ şi $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$; pentru prima pereche avem:

$$\begin{aligned}&\triangle ABC, \quad \triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma; \quad Y_\alpha,\\ &\triangle ABC, \quad \triangle X_\beta X_\gamma X_\alpha; \quad Y_\beta,\\ &\triangle ABC, \quad \triangle X_\gamma X_\alpha X_\beta; \quad Y_\gamma,\end{aligned}$$

iar pentru a doua avem:

$$\begin{aligned}&\triangle ABC, \quad \triangle Y_\alpha Y_\gamma Y_\beta; \quad X_\alpha,\\ &\triangle ABC, \quad \triangle Y_\beta Y_\alpha Y_\gamma; \quad X_\beta,\\ &\triangle ABC, \quad \triangle Y_\gamma Y_\beta Y_\alpha; \quad X_\gamma,\end{aligned}$$

(pe un rând sunt scrise două triunghiuri, pe baza schemei (2), şi centrul lor de omologie).

2. În această secţiune vom stabili o altă proprietate a configuraţiei: cele trei triunghiuri au acelaşi centru de greutate. Pentru aceasta, vom utiliza metoda vectorială. Avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$. Dacă $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, $\mu = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ şi $\lambda\mu - \lambda + 1 \neq 1$, atunci cevienele AA' şi BB' au un punct de intersecţie X şi avem*

$$\overrightarrow{r}_X = \frac{1}{\lambda\mu - \lambda + 1}\left(\lambda\mu\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B - \lambda\overrightarrow{r}_C\right). \tag{3}$$

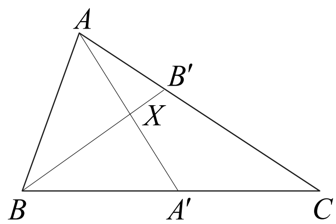
($\overrightarrow{r}_X$ notează vectorul de poziţie al punctului X faţă de o origine arbitrară.)

Demonstraţie. Cu teorema lui Thales se arată uşor că $\lambda\mu - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow AA' \parallel BB'$.

Din $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ şi $\mu = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ urmează că

$$\overrightarrow{r}_{A'} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_B - \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_C,$$

$$\overrightarrow{r}_{B'} = \frac{1}{1-\mu}\overrightarrow{r}_C - \frac{\mu}{1-\mu}\overrightarrow{r}_A.$$



Ţinând cont de aceste relaţii, ecuaţiile vectoriale ale cevienelor: $(AA')\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_A + u\,(\overrightarrow{r}_{A'} - \overrightarrow{r}_A)$, $(BB')\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_B + v\,(\overrightarrow{r}_{B'} - \overrightarrow{r}_B)$ se scriu sub forma

$$(AA') \qquad \overrightarrow{r} = (1-u)\,\overrightarrow{r}_A + \frac{u}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_B - \frac{\lambda u}{1-\lambda}\overrightarrow{r}_C, \tag{4}$$

$$(BB') \qquad \overrightarrow{r} = (1-v)\,\overrightarrow{r}_B + \frac{v}{1-\mu}\overrightarrow{r}_C - \frac{\mu v}{1-\mu}\overrightarrow{r}_A. \tag{5}$$

Vectorul $\overrightarrow{r}_X$ asociat punctului X de intersecţie se obţine din (4) sau (5) pentru u sau v luat dintr-o soluţie (u,v) a sistemului liniar de ecuaţii

$$1-u = -\frac{\mu v}{1-\mu}, \quad \frac{u}{1-\lambda} = 1-v, \quad -\frac{\lambda u}{1-\lambda} = \frac{v}{1-\mu}. \tag{6}$$

Găsim, cu uşurinţă, ca soluţie a sistemului (6) perechea (u,v) cu

$$u = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu-\lambda+1}, \quad v = \frac{\lambda\mu-\lambda}{\lambda\mu-\lambda+1}. \tag{7}$$

După înlocuirea lui u sau v din (7) în (4) sau (5), obţinem pentru $\overrightarrow{r}_X$ reprezentarea (3), q.e.d.

Propoziţia 2. *Triunghiurile ABC, $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Vom arăta că $\triangle X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $\triangle ABC$ au acelaşi centru de greutate (la fel se procedează cu perechea formată din $\triangle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ şi $\triangle ABC$). Este suficient să stabilim că

$$\overrightarrow{r}_{X_\alpha} + \overrightarrow{r}_{X_\beta} + \overrightarrow{r}_{X_\gamma} = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C. \tag{8}$$

Într-adevăr, utilizând Lema relativ la $\triangle ABC$ şi cevienele AA_α şi BB_β, obţinem

$$\overrightarrow{r}_{X_\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta-\alpha+1}\,(\alpha\beta\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B - \alpha\overrightarrow{r}_C)\,; \tag{9}$$

similar obţinem şi relaţiile:

$$\overrightarrow{r}_{X_\beta} = \frac{1}{\alpha\beta-\alpha+1}\,(\overrightarrow{r}_A - \alpha\overrightarrow{r}_B + \alpha\beta\overrightarrow{r}_C) \qquad (\triangle CAB \text{ şi } CC_\alpha,\ AA_\beta), \tag{10}$$

$$\overrightarrow{r}_{X_\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta-\alpha+1}\,(-\alpha\overrightarrow{r}_A + \alpha\beta\overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C) \qquad (\triangle BCA \text{ şi } BB_\alpha,\ CC_\beta). \tag{11}$$

Ţinând seama de (9), (10) şi (11), avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}_{X_\alpha} + \overrightarrow{r}_{X_\beta} + \overrightarrow{r}_{X_\gamma} &= \frac{1}{\alpha\beta-\alpha+1}\big[\,(\alpha\beta+1-\alpha)\,\overrightarrow{r}_A \\ &\quad + (1-\alpha+\alpha\beta)\,\overrightarrow{r}_B + (-\alpha+\alpha\beta+1)\,\overrightarrow{r}_C\big] \\ &= \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C.\end{aligned}$$

adică are loc (8), q.e.d.

3. Să presupunem că triunghiul ABC este echilateral. Se constată uşor, pe cale elementară şi ca o consecinţă a relaţiilor (1), că triunghiurile $X_\alpha X_\beta X_\gamma$ şi $Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma$ sunt, la rândul lor, echilaterale. Conform Propoziţiei 2, aceste triunghiuri au acelaşi centru ca şi triunghiul ABC. Este evidentă, în acest caz particular, înrudirea cu un rezultat remarcabil, *teorema lui Barbilian*: *două triunghiuri echilaterale cu acelaşi centru sunt triomologice.*