Asupra problemei 809 din Gazeta Matematică, volumul VIII (1902–1903)

D. M. BĂTINEŢU - GIURGIU[1]

Cu ocazia aniversării a 110 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice

În istoria matematicii din ţara noastră **Traian Lalescu** reprezintă un creator de diversitate rară, un mare animator al generaţiei sale de matematicieni, un om dotat cu o mare putere de muncă şi inteligenţă scânteietoare, un profesor înzestrat cu deosebit talent pedagogic.

Traian Lalescu s-a născut la 12/24 iulie 1882, în Bucureşti. Studiile primare le-a făcut la Bucureşti, primele două clase de gimnaziu la Craiova (1892-1894), iar clasele a III-a şi a IV-a la Roman (1894-1896). Clasele a V-a şi a VI-a le-a făcut la Liceul Internat din Iaşi (actualul Colegiu Naţional "C. Negruzzi") în perioada 1896-1900.

În liceu, ca şi în gimnaziu, Lalescu a fost premiantul I al clasei şi a primit premiul de onoare al şcolii (Lalescu se află trecut pe tabela de onoare a Liceului Internat din Iaşi).

Chiar din clasa a VI-a a liceului (februarie 1898), Lalescu ajunge corespondent la Gazeta Matematică. Profesorul său de mai târziu, inginerul **Ion Ionescu**, relatează despre **Traian Lalescu** că: "Intrarea lui în rândul corespondenţilor "Gazetei Matematice" nu s-a făcut ca de obicei, în mod timid, lent, progresiv, ci deodată, intens, la maximum posibil. A fost un caz unic de apariţiune la "Gazeta Matematică" de activitate prodigioasă a unui tânăr licean!".

În v. VIII (1902-1903), la pagina 244, Traian Lalescu a propus *Problema 809*, cu următorul enunţ:

Să se arate că: $$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\cdot \operatorname{sh}\frac{1}{x}\right)=-\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{x}}{x^{2n+2}}.$$

La pag. 283 din Gazeta Matematică, v. IX (1903-1904), este publicată soluţia dată de Traian Lalescu acestei probleme, urmată de o notă:

"Se ştie că:

$$\operatorname{sh}x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad \text{şi} \quad \operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots .$$

Vom avea deci:
$$\operatorname{sh}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3!x^3}+\ldots\frac{1}{(2n+1)!x^{2n+1}}+\cdots$$
şi, prin urmare:
$$x^{2n}\operatorname{sh}\frac{1}{x}=P(x)+\frac{1}{(2n+1)!x}+\frac{1}{(2n+3)!x^3}+\cdots+\frac{1}{(2n+2p+1)!x^{2p+1}}+\cdots ,$$
$P(x)$ fiind un polinom întreg în x de gradul $2n$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Matei Basarab", Bucureşti

Seria din membrul al II-lea, uniform convergentă în tot planul exceptând originea, e derivabilă termen cu termen şi rezultatele găsite sunt serii convergente pe aceeaşi întindere, ale căror sume sunt date de derivatele de acelaşi ordin ale membrului I.

Observând acum că:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(P\left(x\right)\right)=0,\quad \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{x^{2p+1}}\right)=-\frac{\left(2p+1\right)\left(2p+2\right)\cdots\left(2p+2n+1\right)}{x^{2n+2p+2}}$$

şi că, prin urmare

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{(2p+2n+1)!x^{2p+1}}\right)=-\frac{1}{(2p)!x^{2p}}\cdot\frac{1}{x^{2n+2}},$$

obţinem

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\operatorname{sh}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^{2n+2}}\left(1+\frac{1}{2!x^2}+\cdots+\frac{1}{(2p)!x^{2p}}+\cdots\right)=-\frac{\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}}{x^{2n+2}}.$$

(T.L.)

Notă. Această problemă a fost rezolvată de D-nii: N. Abramescu, Gr. Orăşanu, G. Constantinescu, M. Radu, C. Gheorghiu şi I. G. Niculescu.

În acelaşi mod se pot demonstra şi formulele:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\dfrac{1}{x}}{x^{2n+2}};\quad \frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)=(-1)^{n}\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}\quad \text{etc.}\ "$$

Ca un omagiu adus marelui matematician român Traian Lalescu, vom da acestei probleme o nouă soluţie, accesibilă elevilor actualului liceu.

Să considerăm funcţiile $f_n:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f_n\left(x\right)=x^{2n}\operatorname{sh}\dfrac{1}{x}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Se constată imediat că f_n este indefinit derivabilă, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Ne propunem să demonstrăm că

$$f_n^{(2n+1)}\left(x\right)=-\frac{1}{x^{2n+2}}\operatorname{ch}\frac{1}{x},\quad \forall n\in\mathbb{N}\tag{1}$$

prin metoda inducţiei matematice, folosind formula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii indefinit derivabile, adică

$$\left(uv\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.\tag{2}$$

Avem $f_0'\left(x\right)=\left(\operatorname{sh}\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}$, deci pentru $n=0$ formula (1) se verifică. De asemenea avem:

$$f_1\left(x\right)=x^2\operatorname{sh}\frac{1}{x},\quad \text{deci}\quad f_1'\left(x\right)=2x\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\operatorname{ch}\frac{1}{x};$$

$$f_1''\left(x\right)=2\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x};$$

$$f_1'''\left(x\right)=-\frac{2}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\operatorname{ch}\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\operatorname{sh}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}\operatorname{ch}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^4}\operatorname{ch}\frac{1}{x},$$

deci şi pentru $n=1$ formula (1) se verifică.

Presupunem că formula (1) este adevărată pentru $n\in\mathbb{N}^*$ adică are loc relaţia

$$f_n^{(2n+1)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}, \tag{3}$$

şi demonstrăm că ea este adevărată şi pentru $n+1$, adică avem

$$f_{n+1}^{(2n+3)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Să observăm că

$$f_{n+1}(x) = x^2 f_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

şi atunci, cu ajutorul formulei (2), avem:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(2n+3)}(x) &= \left(x^2 f_{n+1}(x)\right)^{(2n+3)} = \sum_{k=0}^{2n+3} C_{2n+3}^k f_n^{(2n+3-k)}(x) \cdot \left(x^2\right)^{(k)} = \\ &= C_{2n+3}^0 f_n^{(2n+3)}(x) \cdot x^2 + C_{2n+3}^1 f_n^{(2n+2)}(x) \cdot 2x + C_{2n+3}^2 f^{(2n+1)}(x) \cdot 2 = \\ &= x^2 f_n^{(2n+3)}(x) + 2(2n+3)\, x f_n^{(2n+2)}(x) + (2n+3)(2n+2)\, f_n^{(2n+1)}(x), \ \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6}$$

Conform presupunerii relaţia (3) fiind adevărată, rezultă că:

$$f_n^{(2n+2)}(x) = \left(f_n^{(2n+1)}(x)\right)' = -\left(\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)' = \frac{2n+2}{x^{2n+3}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

şi atunci

$$\begin{aligned} f_n^{(2n+3)}(x) &= \left(f_n^{(2n+2)}(x)\right)' = \left(\frac{2n+2}{x^{2n+3}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}\right)' = \\ &= -\frac{(2n+2)(2n+3)}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{2n+2}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{2n+4}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{2n+6}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} = \\ &= -\frac{(2n+2)(2n+3)x^2+1}{x^{2n+6}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{4n+6}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dacă ţinem seama de relaţiile (3), (7) şi (8), relaţia (6) devine

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(2n+3)}(x) &= -\frac{(2n+2)(2n+3)x^2+1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \frac{4n+6}{x^{2n+5}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} + \frac{2(2n+2)(2n+3)}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} + \\ &+ \frac{2(2n+3)}{x^{2n+3}} \operatorname{sh} \frac{1}{x} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{x^{2n+5}} \Bigg(-\left((2n+2)(2n+3)x^2+1\right) \operatorname{ch} \frac{1}{x} + 2x^2 (2n+2)(2n+3) \operatorname{ch} \frac{1}{x} - \\ &- (2n+2)(2n+3)x^2 \operatorname{ch} \frac{1}{x} \Bigg) = -\frac{1}{x^{2n+4}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că relaţia (4) este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că

$$f_n^{(2n+1)}(x) = -\frac{1}{x^{2n+2}} \operatorname{ch} \frac{1}{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bibliografie

1. **G. Şt. Andonie** - *Istoria matematicii în România*, v. 1, Ed. Şt., Buc., 1965.
2. **M. D. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu-Giurgiu, I. Bîrchi-Damian, A. Semenescu** - *Analiză matematică. Probleme pentru clasa a XI-a*, Ed. Matrix Rom, Buc., 2003.
3. *Colecţia "Gazeta Matematică"*, 1895-2005.