O caracterizare a funcţiilor convexe cu ajutorul derivatelor laterale

Florin POPOVICI[1]

Vom presupune cunoscute proprietăţile elementare ale funcţiilor convexe; în această privinţă pot fi consultate [**1**] sau [**3**]. Un rol aparte îl va juca următoarea

Teoremă (**O. Stolz**; v. *Teorema 1.3.3* din [**1**] sau *Propoziţia 7.1.4* din [**3**]). *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă pe intervalul deschis I, atunci f este derivabilă la stânga şi la dreapta în orice punct din I şi, dacă $x, y \in I$ şi $x \leq y$, avem*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{1}$$

Nota de faţă are strânsă legătură cu lucrarea [**2**] şi o presupune cunoscută. Utilizând derivatele laterale în locul derivatei, în [**2**] este presentată o generalizare a teoremei de medie a lui Lagrange şi, ca o consecinţă, se face următoarea legătură cu funcţiile convexe:

Teorema lui Lagrange pentru funcţii convexe ([**2**], *Corolarul 1*). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă, I deschis. Atunci, $\forall a, b \in I$ cu $a < b$, $\exists c \in (a, b)$ încât*

$$f'_-(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_+(c). \tag{2}$$

Scopul nostru este de a dovedi o reciprocă a Teoremei lui Stolz şi, astfel, de a obţine o caracterizare a funcţiilor convexe – Corolarul de mai jos.

Teoremă. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval deschis, este derivabilă la stânga şi la dreapta pe I şi $\forall x, y \in I$, $x < y$, au loc inegalităţile* (1), *atunci f este convexă pe I.*

Demonstraţie. Fie $x, y, z \in I$ cu $x < y < z$. Teorema precedentă asigură că $\exists c \in (x, y)$ şi $\exists d \in (y, z)$ astfel încât

$$f'_-(c) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_+(c) \quad \text{şi} \quad f'_-(d) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'_+(d).$$

Cum, datorită ipotezei, $c < d$ implică $f'_+(c) \leq f'_-(d)$, rezultă că

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

şi, conform Corolarului 3 al Propoziţiei 1.4.3 din [**3**], funcţia f este convexă.

Corolar. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta pe I şi are loc* (1) *pentru orice $x, y \in I$ cu $x < y$.*

Bibliografie

1. **C. P. Niculescu** - *Convex Function, Basic Theory and Applications*, Universitaria Press, Craiova, 2003.
2. **F. Popovici** - *O generalizare a teoremelor de bază ale calculului diferenţial*, RecMat - 2/2004, 104-105.
3. **Gh. Sireţchi** - *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I, Ed. Şt. şi Encicl., Buc., 1985.

[1] Profesor, Liceul "N. Titulescu", Braşov