Asupra monotoniei unor şiruri

Dumitru MIHALACHE, Marian TETIVA[1]

În această notă ne propunem să investigăm monotonia şirurilor care apar la precizarea ordinului de convergenţă al câtorva şiruri uzuale. Mai precis, dacă limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este a (finită), iar $(z_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu limita zero astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a}{z_n},$$

finită şi nenulă, atunci spunem că $(z_n)_{n\geq 1}$ dă *ordinul de convergenţă* al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ către limita sa (este un fel de a măsura "rapiditatea" cu care $(a_n)_{n\geq 1}$ tinde la limită cu ajutorul unor şiruri cunoscute şi/sau mai accesibile; a se vedea şi [**2**]). Ne propunem să cercetăm dacă şirul cu termenul general $(a_n-a)/z_n$ este sau nu monoton în cazul unor şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ des întâlnite şi importante în analiza matematică.

Primul şir de care ne ocupăm este cel cu termenul general

$$E_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Aşa cum se ştie, acesta este convergent, are limita e, iar ordinul său de convergenţă este dat de relaţia

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot n!(e-E_n)=1,$$

ceea ce se verifică uşor cu teorema lui Cesàro - Stolz (cazul $\frac{0}{0}$). Pentru a vedea monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = n\cdot n!(e-E_n)$ trebuie să comparăm x_n cu x_{n+1}. Avem

$$x_n\ ?\ x_{n+1} \Leftrightarrow n(e-E_n)\ ?\ (n+1)^2\left(e-E_n-\frac{1}{(n+1)!}\right)\Leftrightarrow \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)}\ ?\ e-E_n.$$

Este bine cunoscută şi inegalitatea $e-E_n<\dfrac{1}{n\cdot n!}$ (v. [**3**]); cum $\dfrac{n+1}{n!(n^2+n+1)}<$ $<\dfrac{1}{n\cdot n!}$, de aici nu putem obţine nimic. Atunci vom proceda astfel:

$$e-E_n=\frac{1}{n!}\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}>$$

$$>\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right).$$

Un calcul simplu (chiar dacă, poate, neplăcut!) arată că expresia de pe ultimul rând este egală cu

$$\frac{n^3+10n^2+34n+41}{n!(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}>\frac{n+1}{n!(n^2+n+1)},$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu

$$n^5+11n^4+45n^3+85n^2+75n+41>n^5+11n^4+45n^3+85n^2+74n+24,$$

adică evidentă pentru orice număr natural n. Astfel am demonstrat

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţia 1. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general* $x_n = n\cdot n!(e-E_n)$ *este strict crescător.*

O altă metodă de a demonstra Propoziţia 1 este prezentată în

Exerciţiul 1. *Arătaţi că şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*
$$u_n = E_n + \frac{n+1}{n!(n^2+n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
este strict crescător cu limita e *şi deduceţi de aici inegalitatea* $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şi încă o observaţie: avem acum inegalităţile
$$\frac{n+1}{n!(n^2+n+1)} < e - E_n < \frac{1}{n\cdot n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
care implică, şi ele, faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot n!(e-E_n) = 1$ (cum?).

Următorul de care ne ocupăm este *şirul lui Euler*, care defineşte numărul e; aşadar considerăm
$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$$
Iar facem apel la o relaţie cunoscută (a se vedea [**4**], sau [**6**]), anume
$$\lim_{n\to\infty} n\,(e-e_n) = \frac{e}{2};$$
deci ne interesează acum (din punct de vedere al monotoniei) şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = n(e-e_n)$, $\forall n \geq 1$. Dar, înainte, să demonstrăm

Lema 1. *Funcţia definită prin* $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, *pentru orice* $x > 0$ *este strict convexă pe* $(0,\infty)$.

Demonstraţie. Vom folosi prima dintre inegalităţile
$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$
(pentru care se poate vedea tot [**6**]; de altfel, sunt nişte inegalităţi destul de vehiculate, care arată că, pentru funcţia logaritm natural, punctul intermediar din teorema lui Lagrange este cuprins între mediile aritmetică şi geometrică ale extremităţilor intervalului pe care se aplică, aici intervalul $[x, x+1]$), desigur, după ce vom calcula derivata a doua. Cititorul este invitat să verifice că
$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}\right], \quad \forall x > 0 \quad \text{şi}$$
$$f''(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[x\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x+1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right], \quad \forall x > 0.$$
Atunci, procedând cum am anunţat, vom putea scrie
$$f''(x) > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[x\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{2x+1} - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right] \quad \text{sau}$$
$$f''(x) > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \frac{3x+1}{(x+1)^2(2x+1)^2}, \quad \forall x > 0,$$

de unde $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$, şi lema este dovedită.

Propoziţia 2. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$x_n = n\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = n(e - e_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

este strict crescător.

Demonstraţie. Inegalitatea de demonstrat este $n(e-e_n) < (n+1)(e-e_{n+1})$ şi este echivalentă cu $(n+1)e_{n+1} - ne_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum

$$\lim_{n\to\infty} [(n+1)e_{n+1} - ne_n] = \lim_{n\to\infty} [(n+1)(e_{n+1} - e) - n(e_n - e) + e] = e,$$

înseamnă că ar fi suficient să arătăm că şirul $((n+1)e_{n+1} - ne_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Dar monotonia acestui şir decurge din inegalitatea

$$(n+1)e_{n+1} - ne_n < (n+2)e_{n+2} - (n+1)e_{n+1} \Leftrightarrow f(n+2) + f(n) > 2f(n+1);$$

această ultimă formă nu este nimic altceva decât inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei convexe f şi numerelor n şi $n+2$. Demonstraţia este încheiată.

Exerciţiul 2. *Studiaţi monotonia şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$x_n = n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mai departe considerăm şirul cu termenul general

$$\zeta_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha > 1$ este un număr fixat. Se vede imediat că acest şir este strict crescător şi (ceva mai greu) mărginit superior, deci are o limită finită, pe care o notăm cu $\zeta(\alpha)$. În paranteză fie spus, funcţia care asociază fiecărui număr real $\alpha > 1$ pe $\zeta(\alpha)$ se numeşte *funcţia zeta a lui Riemann* şi are mare importanţă în multe domenii ale matematicii. Se mai ştie că ordinul de convergenţă al şirului $(\zeta_n(\alpha))_{n\geq 1}$ este dat de egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}(\zeta(\alpha) - \zeta_n(\alpha)) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(vezi, de exemplu, [**8**]). Aşadar, ne interesează monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin

$$x_n = n^{\alpha-1}(\zeta(\alpha) - \zeta_n(\alpha)), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

în legătură cu aceasta avem

Propoziţia 3. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$*, cu termenul general* $x_n = n^{\alpha-1}(\zeta(\alpha) - \zeta_n(\alpha))$*,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, este strict crescător.*

Demonstraţie. Inegalitatea $x_n < x_{n+1}$ devine în acest caz (după câteva calcule, ţinând cont de $\zeta_{n+1}(\alpha) = \zeta_n(\alpha) + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$)

$$\frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}]} + \zeta_n(\alpha) < \zeta(\alpha).$$

Notând

$$u_n = \frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1} - n^{\alpha-1}]} + \zeta_n(\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

observăm că este suficient să demonstrăm că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, ca să rezulte inegalitatea pe care o avem de demonstrat (deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \zeta(\alpha)$, ceea ce se stabileşte uşor). Avem

$$u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)[(n+1)^{\alpha-1}-n^{\alpha-1}]} < \frac{1}{(n+2)[(n+2)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}]} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha-1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{1}{(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha-1}(n+2)} \Leftrightarrow$$

$$n^{\alpha-1}(n+1)(n+2)^{\alpha} - n^{\alpha-1}(n+1)^{\alpha} < (n+1)^{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$n^{\alpha-1}[(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}] < (n^2+2n+1)^{\alpha} - (n^2+2n)^{\alpha}.$$

Pentru a demonstra această ultimă inegalitate, aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $x \mapsto x^{\alpha}$, pe intervalele $[n+1, n+2]$ şi $[n^2+2n, n^2+2n+1]$; obţinem

$$(n+2)^{\alpha} - (n+1)^{\alpha} = \alpha c_n^{\alpha-1}, \quad c_n \in [n+1, n+2] \quad \text{şi}$$

$$(n^2+2n+1)^{\alpha} - (n^2+2n)^{\alpha} = \alpha d_n^{\alpha-1}, \quad d_n \in [n^2+2n, n^2+2n+1].$$

Cum $nc_n < n(n+2) = n^2+2n < d_n$ şi $\alpha > 1$, rezultă $n^{\alpha-1} \cdot \alpha c_n^{\alpha-1} < \alpha d_n^{\alpha-1}$, care este tocmai inegalitatea de demonstrat.

În fine, ne vom ocupa de şirul care dă ordinul de convergenţă al şirului ce defineşte *constanta lui Euler*. Ştim că aceasta este

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

şi că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - c\right) = \frac{1}{2}$$

(a se vedea [**5**]). Avem şi aici nevoie, mai întâi, de un mic rezultat ajutător.

Lema 2. *Funcţia* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$f(x) = x\ln x + (x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}, \quad \forall x > 0,$$

este strict descrescătoare şi strict pozitivă pe intervalul $(0,\infty)$.

Demonstraţie. Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$, căci

$$f'(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \quad \forall x > 0,$$

conform inegalităţii $\ln(1+t) < t$, $\forall t > -1$, $t \neq 0$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (calcul de rutină!) rezultă că $f(x) > 0$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Exerciţiul 3. *Funcţia* f *din Lema 2 este strict convexă pe intervalul* $(0,\infty)$.

Propoziţia 4. *Şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general*

$$x_n = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - c\right)$$

este strict crescător.

Demonstraţie. Inegalitatea $x_n < x_{n+1}$ se rescrie în forma

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+1+n\ln n-(n+1)\ln(n+1)>c$$

şi ar fi demonstrată dacă am putea arăta că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, dat de

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+1+n\ln n-(n+1)\ln(n+1), \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

este strict descrescător (deoarece $(u_n)_{n\geq 1}$ are limita c - demonstraţi!). Dar inegalitatea $u_n > u_{n+1}$ se reduce la

$$n\ln n+(n+2)\ln(n+2)-2(n+1)\ln(n+1)-\frac{1}{n+1}>0$$

şi decurge din lema anterioară, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$; astfel, demonstraţia este încheiată.

Şi, odată cu ea, este încheiată şi această notă. Dar calculele pot continua... De exemplu:

Exerciţiul 4. *Studiaţi monotonia şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *pentru*

a) $x_n=(n+1)\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$;

b) $x_n=(n+1)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right]$;

c) $x_n=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}-l\right)$, *unde* $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)$.

Bibliografie

1. **D. Andrica, V. Berinde, L. Toth, A. Vernescu** - *Ordinul de convergenţă al unor şiruri*, G. M. A, 7-8/1998.
2. **V. Berinde** - *Despre ordinul de convergenţă al şirurilor de numere reale*, G. M. 4/1998.
3. **Gh. Gussi, O. Stănăşilă, Gh. Stoica** - *Analiză matematică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1983.
4. **E. Păltănea** - *Asupra vitezei de convergenţă a şirului* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, G. M. A, 3/2001.
5. **A. Vernescu** - *Ordinul de convergenţă al şirului de definiţie a constantei lui Euler*, G. M. 10-11/1983.
6. **A. Vernescu** - *O demonstraţie simplă a unei inegalităţi relative la numărul* e, G. M. 5-6/1988.
7. **A. Vernescu** - *Asupra convergenţei unui şir cu limita* $\ln 2$, G. M. 10-11/1997.
8. **A. Vernescu** - *Asupra seriei armonice generalizate*, G. M. A, 3/1997.