Asupra unor ecuaţii diofantice pătratice

Gheorghe MOLEA[1]

Scopul acestui material este de a prezenta câteva procedee de rezolvare a unor ecuaţii diofantice de gradul al doilea cu două sau trei necunoscute accesibile nivelului gimnazial şi a le aplica în rezolvarea câtorva probleme întâlnite în *Gazeta Matematică* sau alte publicaţii.

Teorema 1. *Soluţiile întregi ale ecuaţiei*

$$ax^2 + bxy + cy + d = 0, \tag{1}$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ *şi* $d \in \mathbb{Z}$, *sunt*

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{p-c}{b}, \frac{q-ap+2ac}{b^2} \right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ p, q \in \mathbb{Z},\ pq = -\left(ac^2 + b^2 d\right) \right\}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Înmulţind ecuaţia cu b^2 şi apoi scăzând ac^2 din ambii membri, obţinem

$$ab^2x^2 + b^3xy + cb^2y + db^2 - ac^2 = -ac^2 \Leftrightarrow (bx + c)\left(abx + b^2y - ac\right) = -ac^2 - b^2d.$$

Ca urmare, soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) sunt soluţiile întregi ale sistemelor

$$bx + c = p, \quad abx + b^2y - ac = q; \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

unde $pq = -\left(ac^2 + b^2d\right)$. Rezolvarea acestor sisteme conduce la soluţiile

$$x = \frac{p-c}{b}, \quad y = \frac{q-ap+2ac}{b^2},$$

deci soluţiile întregi ale ecuaţiei (1) sunt date de (2).

Aplicaţie. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $9x^2 - 4xy - y = 1$ (**Loredana Agore** – *E:12418*, G.M. - 10/2002).

Soluţie. Avem $a = 9$, $b = -4$, $c = -1$, $d = -1$, deci $-\left(ac^2 + b^2d\right) = 7$, de unde $(p, q) \in \{(1, 7), (7, 1), (-1, -7), (-7, -1)\}$. Ţinând seama de (2), obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(-2, -5), (0, -1)\}$.

Teorema 2. *Soluţiile întregi ale ecuaţiei*

$$ax^2 + bx - ay^2 + c = 0, \tag{3}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, *sunt*

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{p+q-2b}{4a}, \frac{q-p}{4a} \right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ p, q \in \mathbb{Z},\ pq = b^2 - 4ac \right\}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Înmulţind (3) cu $4a$ şi adunând apoi b^2 la ambii membri, obţinem

$$\left(4a^2x^2 + 4abx + b^2\right) - 4a^2y^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b - 2ay)(2ax + b + 2ay) = b^2 - 4ac.$$

Revine la a găsi soluţiile sistemelor liniare

$$2ax + b - 2ay = p, \quad 2ax + b + 2ay = q; \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

cu $pq = b^2 - 4ac$. Soluţiile întregi ale acestora, deci şi ale ecuaţiei (3), sunt date de (4).

[1] Profesor, Şcoala "Basarab I", Curtea de Argeş

Aplicaţie. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia* $x^2 + 13x = y^2 - 26$ (**Gh. Achim** – *C:2487*, G.M. - 3/2002).

Soluţie. Avem $a = 1$, $b = 13$, $c = 26$ şi $b^2 - 4ac = 65$. Deci $(p, q) \in \{(1, 65), (65, 1), (5, 13), (13, 5), (-1, -65), (-65, -1), (-5, -13), (-13, -5)\}$ şi, din (4), soluţiile căutate sunt $(x, y) \in \{(10, 16), (10, -16), (-2, 2), (-2, -2), (-23, -16), (-23, 16), (-11, -2), (-11, 2)\}$.

Teorema 3. *Soluţiile în* $\mathbb{Z}^3$ *ale ecuaţiei*

$$x^2 + ay^2 = \left(a + b^2\right) z^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}^*, \tag{5}$$

sunt date de

$$x = t\left(2amn - bm^2 + abn^2\right), \; y = t\left(an^2 - 2bmn - m^2\right), \; z = t\left(an^2 + m^2\right), \; t, m, n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Ecuaţia (5) se mai scrie $(x + bz)(x - bz) = a(z - y)(z + y)$ şi este echivalentă cu ansamblul sistemelor liniare

$$m(x + bz) = an(z - y), \quad n(x - bz) = m(z + y); \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Rezolvate în raport cu x şi y, acestea conduc la soluţiile

$$x = \frac{z\left(2amn - bm^2 + abn^2\right)}{an^2 + m^2}, \quad y = \frac{z\left(an^2 - 2bmn - m^2\right)}{an^2 + m^2}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Notând $z = t\left(an^2 + m^2\right)$, $t \in \mathbb{Z}$, obţinem ca posibile soluţii ale ecuaţiei (5) tripletele (x, y, z) cu x, y, z daţi de (6). Se verifică uşor că toate aceste triplete sunt soluţii ale ecuaţiei date.

Aplicaţie. *Să se arate că există o infinitate de numere întregi* x, y, z *astfel încât* $x^2 + y^2 = 2z^2$ (**Dana** şi **Eugen Radu** – *Probleme de matematică pentru concursuri şi examene*).

Soluţie. Luând în (6) $a = b = 1$, găsim că soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 = 2z^2$ sunt date de

$$x = t\left(n^2 - 2mn - m^2\right), \; y = t\left(n^2 + 2mn - m^2\right), \; z = t\left(m^2 + n^2\right), \quad t, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Exerciţiu. Rezolvaţi în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2 - y^2 = 3z^2$.

Teorema 4. *Soluţiile ecuaţiei*

$$ax^2 + bxy + c^2y^2 = z^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

în mulţimea $\mathbb{Z}^3$ *sunt date de*

$$x = t\left(bm^2 - 2cmn\right), \quad y = t\left(n^2 - am^2\right), \quad z = t\left(bmn - cn^2 - acm^2\right), \quad t, m, n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Demonstraţie. Scriind ecuaţia dată în forma $x(ax + by) = (z - cy)(z + cy)$ şi procedând ca în cazul ecuaţiei (5) obţinem sistemele liniare

$$nx + cmy = mz, \quad amx + (bm - cn)y = nz; \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

şi în cele din urmă rezultatul dorit.

Aplicaţie. *Se consideră* $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. *Demonstraţi că ecuaţia în* x *şi* z: $ax^2 + bx + c^2 = z^2$ *are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţionale* (**Gigel Buth** – *C:2690*, G.M. - 12/2003).

Soluţie. Ecuaţia din enunţ se obţine din (7) pentru $y = 1$. Ţinând seama de (8), urmează că $t\left(n^2 - am^2\right) = 1$ şi, deci,

$$x = \frac{bm^2 - 2cmn}{n^2 - am^2}, \quad z = \frac{bmn - cn^2 - acm^2}{n^2 - am^2}; \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{cu} \quad n^2 - am^2 \neq 0.$$

Aşadar, ecuaţia dată are o infinitate de soluţii (x, y) cu $x, y \in \mathbb{Q}$.

Aplicaţie. *Să se arate că ecuaţia $x^2 + xy + y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii numere raţionale* (**L. Panaitopol, D. Şerbănescu** – *Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori*, Problema 153).

Soluţie. Procedăm ca în aplicaţia precedentă. Luând $a = b = c = 1$ şi $z = 1$ în (7), se obţine ecuaţia dată. Din (8), avem $t\left(mn - m^2 - n^2\right) = 1$ şi apoi

$$x = \frac{m^2 - 2mn}{mn - m^2 - n^2} \in \mathbb{Q}, \quad y = \frac{n^2 - m^2}{mn - m^2 - n^2} \in \mathbb{Q}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Observaţie. Pentru $a = c = 1$ şi $b = 0$ ecuaţia (7) devine *ecuaţia pitagoreică* $x^2 + y^2 = z^2$, iar (8) conduce la soluţiile acesteia: $x = 2mnt$, $y = \left(m^2 - n^2\right)t$, $z = \left(m^2 + n^2\right)t$ cu $t, m, n \in \mathbb{Z}$.

Recreaţii ... matematice

Truelul

Un *truel* este asemănător cu un *duel*, dar există trei participanţi în loc de doi.

Domnii X, Y şi Z se hotărăsc să rezolve un conflict truelându-se cu pistoalele până când va rămâne în viaţă doar unul dintre ei. X este cel mai prost trăgător, nimereşte în medie ţinta doar o dată din trei. Y este un trăgător mai bun, nimereşte ţinta de două ori din trei. Z este cel mai bun trăgător, nimereşte ţinta de fiecare dată. Pentru a face truelul mai echitabil, X trage primul, urmat de Y (dacă mai este în viaţă), urmat de Z (dacă mai este în viaţă) ş. a. m. d., luând ostilităţile de la început, până când rămâne în viaţă numai unul singur dintre ei.

Întrebarea este următoarea: asupra cui ar trebui să tragă X primul său foc?

Notă. Răspunsul se găseşte la p. 70.